# ミクロ経済学2018 年度講義レジュメ

http://yuji-aruka.jp/seminar/

中央大学商学部

有　賀　裕　二

Copyright :Professor Dr. Yuji Aruka

# 授業の心構え

- 学問の目的

「大学の道は明徳を明らかにするに在り。民に親（新）たにするに在り、至善に止まるに在り。」

（『大学』冒頭より引用、秦の始皇帝の時代）

- 学ぶべき態度

「憤せずんば啓かず、苛（ヒ）せざれば発さず。一隅を挙げて三隅を以て反せずんば、すなわち復びせず。」

（『論語』述而第七の8、2500年前）

  - 求める気持ちができるまではこうだと教えず求めるものがわかっても表現できないときにはこうだと引き発してやらない。一隅を示してやってその他の三隅をつかもうとしない者には再び教えてやらない。

# 姓名「あるか」の由来

氏名　有賀 裕二　ARUKA, Yuji

有賀は「あるか」と読む。

有賀は長野県諏訪の地名で「あるが」と読む。信州守護大名小笠原氏が九州小倉へ移封（知行替え）。信州から小倉へ同行した小笠原藩士の名前。賀（が）が西国で賀（か）に変化。「あるか」は小倉藩時代の名残。

[例] 賀茂川　かもがわ

血統上の家系

有賀は祖父が家督継承した姓名。曽祖父は小倉藩書院番・由良源三郎の弟・幸之助（幸蔵）で中村の家督を相続。祖父の兄弟は家禄を確保するためそれぞれ異なる家督を相続。よって、直系親族の姓名は高祖父、曽祖父、祖父、祖父の兄弟でみな異なることになった。

> 曽祖父は小倉藩貨幣方（士分・御目見通）。明治維新後、鉄道事業に参画し能登七尾鉄道社長となる。祖父は紡績全盛期の大日本紡績取締役・監査役。祖父四兄弟は祖父を含め3人が上場企業役員、1人が陸軍中将（第5師団長・工兵監・勲一等・金鵄勲章功三級）。この陸軍中将の大叔父のほか、祖父母方兄弟に陸軍主計少将（主計監・金鵄勲章功四級）。その子に海軍技術中将（呉工廠造船部長・実験部長・戦艦大和担当）、陸軍大佐（近衛第4連隊長）。なお、祖父四兄弟には男子は祖父と軍人の大叔父に1人ずつしか生まれなかった。父は大日本紡績に入社。大叔父の長男、孫はともに医師となる。

サンスクリット”argha”（アルガ）

→ 水の意味

単語”aruka”は国際的に分布

商品名（米国） arukah oil

人名（スペイン女子ゴルファー）Aruka Felgeroso

[地名例]　南米ブラジル　ギアナ高地

Aruka River

https://geographic.org/geographic_names/name.php?uni=-1360268&fid=2238&c=guyana

相模原海老名の有鹿神社（あるかじんじゃ）は紀記以前の最高神を祀る

有鹿神社

https://ja.wikipedia.org/wiki/有鹿神社

日本語は縄文5000年の歴史とともに発展。漢字導入はせいぜい1500年未満。訓読みの「あるか」という発音が先に存在し、漢字「有鹿」は宛て字にすぎない。鹿がいたから有鹿という地名ができたわけではない。

# 有賀裕二の研究者情報

http://yuji-aruka.jp/profile/

学位　京都大学博士（経済学）

早稲田大学第一政治経済学部卒業（1972年）

京都大学大学院経済学研究科博士課程単位取得(1979年）

専門分野　**進化経済学　複雑系社会科学**

進化経済学会会長（第6代目）

2015年度-2017年度

進化経済学会紹介ビデオ

https://www.youtube.com/watch?v=v2ECXrLyLjA

外務省専門職試験委員（経済学）

1997年度-2005年度

研究上の仕事

http://worldcat.org/identities/lccn-n83202888/

Coordinating Editor, Evolutionary and Institutional Economics Review

http://www.springer.com/economics/economic+theory/journal/40844

Editor-in-Chief, Evolutionary Economics and Social Complexity Science (Springer Monograph Series)

http://www.springer.com/series/11930

Associate Editor, Journal of Economic Interaction and Coordination

http://www.springer.com/economics/economic+theory/journal/11403

思想上、尊敬する人物

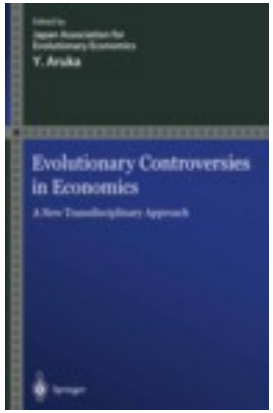
渋沢栄一（日本資本主義の父）

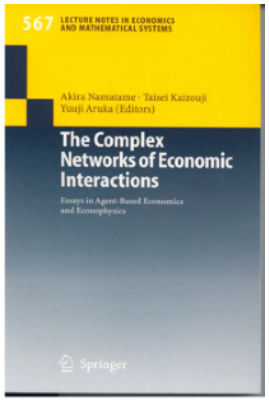
http://yuji-aruka.jp/contents/rongo2008.pdf

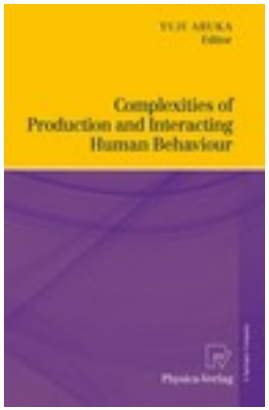
# Aruka's works

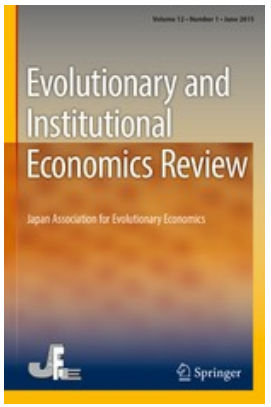
## main books

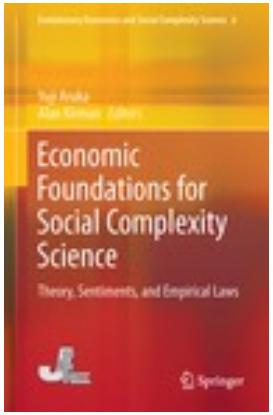
journal編集

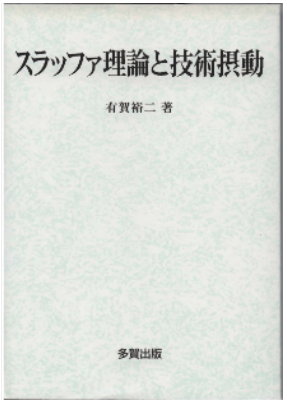


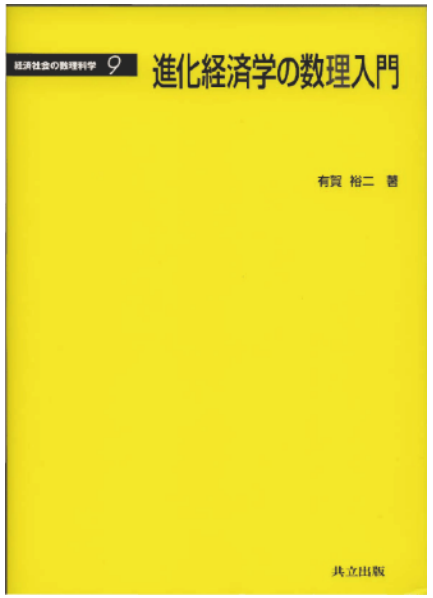



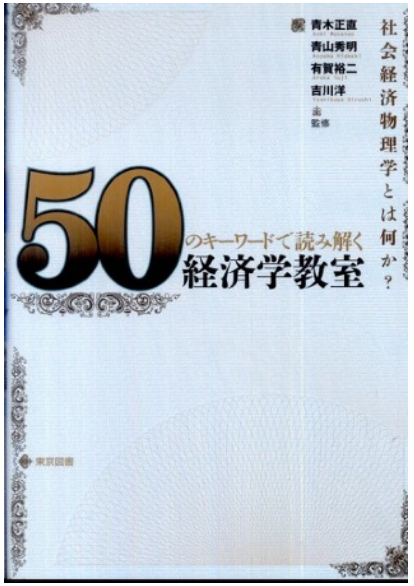


# 有賀の教科書

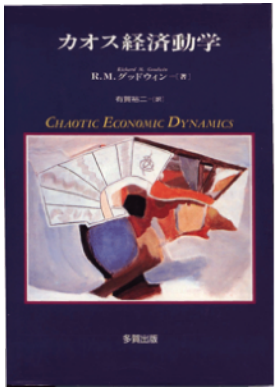
## 主たるもの



# 有賀の翻訳書

## 主たるもの



# Change the World – One article at a time by Springer Nature

論文　Aruka, Yuji,

Special feature: preliminaries towards ontological reconstruction of economics—theories and simulations,

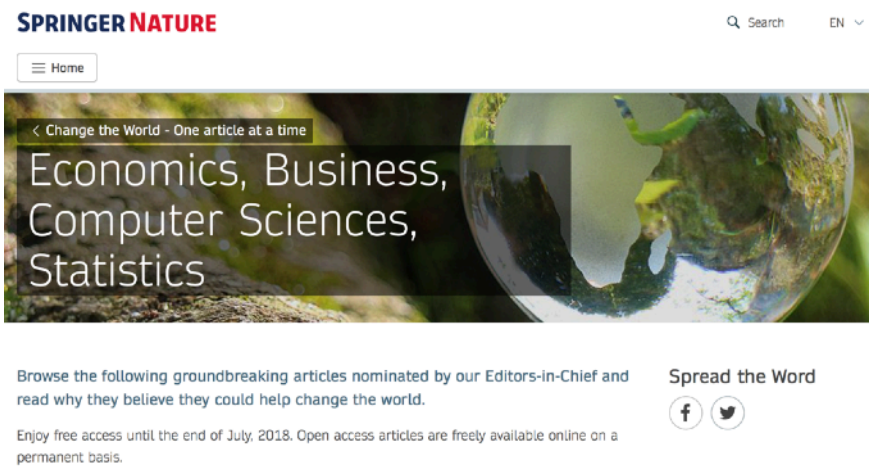
Evolutionary and Institutional Economic Review, December 2017, Volume 14, Issue 2, pp.409–414

has been listed in

**Change the World by Springer Nature**

特集（経済、ビジネス、計算機科学、統計分野）の15論文に選定される。

https://www.springernature.com/gp/researchers/campaigns/change-the-world/economics-business-statistics-computer-sciences?



# Kevin Slavin: How algorithms shape our world

https://www.ted.com/talks/kevin_slavin_how_algorithms_shape_our_world

# ナシム・ニコラス・タレブ

## Black Swan, Anti-fragility

タレブは、ソクラテス、セクストス・エンペイリコス、ガザーリー、ピエール・ベール、ミシェル・ド・モンテーニュ、デイヴィッド・ヒューム、カール・ポパーと続く懐疑主義者の長い系譜を踏まえて、我々は自分で思っているほど物事を知らず、未来を予測するために、むやみに過去を使うべきでないとした。さらに、タレブは、「不完全な理解と不完全な情報の下での行動をどうすべきか」という意思決定フレームワークを生み出した。その後、タレブは、無作為性の哲学や、科学や社会での不確かさの役割を研究するようになり、好ましいかどうかに関わらず、特に重大な影響を及ぼす無作為な事象を主題としている。タレブは、これを "Black Swan"（黒鳥） と呼び、歴史の流れを決定付けているとする。

以上、Wikipediaからの引用

https://ja.wikipedia.org/wiki/ナシム・ニコラス・タレブ

世界的ベストセラー書の邦訳

ブラック・スワン[上・下]—不確実性とリスクの本質 - ナシーム・ニコラス・タレブ

ダイヤモンド社2009

反脆弱性[ 上・下]——不確実な世界を生き延びる唯一の考え方

ダイヤモンド社2017

Nassim Nicholas Taleb

| | |
|---|---|
| **生誕** | 1960年<br>レバノン Amioun |
| **居住** | アメリカ合衆国 |
| **研究分野** | 学者、随筆家、知識人、統計学者、金融トレーダー |
| **研究機関** | Polytechnic Institute of New York University(en) |
| **出身校** | ペンシルベニア大学ウォートン・スクール（MBA）、パリ大学（第9、Ph.D.） |
| **博士課程指導教員** | Hélyette Geman |
| **主な業績** | 無作為性と認識に関する研究、統計についての哲学、金融危機を事前に警告 |

# 純粋経済学を始める前に

参考文献


- 有賀裕二(2015) 「純粋経済学の起源と新スコラ学派の発展」、八木・有賀・大坂・吉田編「経済学と経済教育の未来」桜井書店第５章pp. 125-144所収

- Yuji Aruka(2015): The rise of pure economics under a new form of scholasticism in view of the present socio-economic system, Evolutionary and Institutional Economics Review, vol.12.1(2015), in print
  http://link.springer.com/article/10.1007/s40844-015-0003-4

- Yuji Aruka(2015), *Evolutionary Foundations of Economic Science: How Can Scientists Study Evolving Economic Doctrines from the Last Centuries?*, Springer, Tokyo and New York, 219pp.

# 思想的偏奇

## ライプニッツ楽観主義思想 everything is at best

ヴォルテール作「カンディード」。 当時の楽天主義「この最善なる可能世界においては、あらゆる物事はみな最善である」ことを諷刺した小説

## アクィナス神学・スコラ学からの正当化 サラマンカ学派

現実では純粋性は制限を受ける → 合理性があるからこそ現実は限定合理性になる!!

# ヴォルテール著『カンディード』

大啓蒙思想家ヴォルテール (1694-1778)

カンディードで論破される命題
「この最善なる可能世界においては、あらゆる物事はみな最善である」
（Everything is at best）

https://ja.wikipedia.org/wiki/カンディード

上記命題が、あらゆる不幸が襲いかかる一連の冒険を通じて、劇的に論駁される。この作品はゴットフリート・ライプニッツ哲学を風刺した小説であり、18世紀の世界に存在した恐怖を陳列した小説でもある。この小説でライプニッツ哲学は、カンディードの家庭教師である哲学者パングロスによって象徴される。物語の中で繰り返される不幸や災難にも関わらず、パングロスは「tout est au mieux（すべての出来事は最善）」であり、「自分は le meilleur des mondes possibles （最善の可能世界）において生活している」と主張し続ける。
（Wikipediaより引用）

# サラマンカ学派と新古典派経済学の発生

- ハイエクFriedlich Hayek(1973) は、**トマス・アクィナス**以来の自然法論に基づき「自然法の起源」が**スコラ学派**後期のサラマンカ学派(16-18世紀)の影響があることを指摘。

- サラマンカ学派は、現実とスコラ学の調和を目指し、自然法に基づき独占を否定する一方で、徴利や為替取引を容認した。

- 20世紀になってシュンペーターやハイエクの研究により、経済学におけるオーストリー学派や主観価値学説がスコラ主義的背景を有することが確定される。

  - スコラ学と最初の経済学の出会いは「**利息**」であった。元々は、キリスト教会もイスラム教と同じく利子そのものを否定する立場にあった。そもそも高利貸しを禁じていた時代が先行している。しかし、アクィナスに基づく「トマス主義」は、利息の取り立てを許す論拠を与えて、その後、キリスト教会は高利貸しを禁ずるが利息を容認する政策緩和措置をとることになる　(Tawney 1926, 八木編2007 第６章) 。

# 西洋における「純粋経済学の成立」
## アクィナスと自由意志の導入

トマス・アクィナス＝中世最大の神学者

- 「不確実性」が現実の世界の構成からやむをえない以上、現実世界に生きる人間は**自由意志**がないと対処できないということを容認する。
- 人間社会に様々な偶然性が生じることこそが、逆に、神の存在の必然性を証明している、と推理する。
- アクィナス以降、神学のなかに**人間の自由意志**が不可欠になり、それこそが神の証明のツールになった。
  - Mainzer K (2007) Der kreative Zufall: Wie das Neue in die Welt kommt. C. H. Beck, München; 邦訳(2011)：有賀裕二訳『複雑系から創造的偶然へ －カイロスの科学哲学史－』共立出版の第１章からの引用

# 合理性、限定合理性、アルゴリズム合理性

- 経済学の合理性は**個人主義的合理性**（人間の合理性）

  → 「選好理論の合理的仮説」に集約されている。後述。

- 純粋経済学では、「個人主義的合理性は必然的に存在しなければならない」→ 個々の純粋経済学者に自由意志が許される。

- 近年、純粋経済学は、「限定合理性」を理論的に内部化した。つまり、限定合理性は合理性の発現形態。限定合理性は合理性の否定ではなくむしろ肯定である。この論理は、トマス・アクィナスの推論と軌を一にしている。

  合理性が必然である世界は、様々な確率的ノイズや制度的、認知的なヒューマン・ネイチャーの限定性から実現されない。しかし、このような現実の存在こそが、**内部に必然的に合理的な力が働いている**ことを間接的に証明している、という主張が導かれる。

- 合理性の問題は、合理性vs限定合理性ではなく、限定合理性（実は個人主義的合理性）vs アルゴリズム合理性である。ICT社会の出現は、**アルゴリズム合理性の支配**と同値である。

  → 人間合理性に対して「**アルゴリズム合理性**」がある。Kevin Slavin ビデオ参照

# 方法論的偏奇

## 存在論の徹底的無視

存在論 how to exist を徹底的に無視する。制度や制度のタイプ、社会の関係性を無視する。how to study モノばかり!!

## 二種類の存在論

旧タイプ　新タイプ New kind of science in line with Turing's tradition → セルラーオートマトン

## 情報科学のオントロジー

コンピュータ上に記述できる、タイプ、性質、関係性のタイプからなる集合によって構成される世界が how to exist を記述する。とくに、entity の間の関係性をコンピュータで特定することは重要!!

# 経世済民

# Economyの語源

## Economy

- **eco-**
  **ギリシア語** οἶκος (ôikos オイコス)
  home，棲家、家

- **-nomy**
  **ギリシア語** νόμος (nomosノモス)
  law, custom

したがって、

Economy，Öknomie
は「オイコス（家）＋ノモス（法）」で、あわせて家長による賢明な管理という意味で「家政」とも訳すことができる。

## Political economy

- 経済学はAdam Smithの名前とともにアングロサクソン由来のもののように見える。しかし、economy の語源は**ギリシア**。

  ヨーロッパ大陸全般で普及してきた用語である。

- 経済学の歴史ではeconomicsに先行して、principles of political economyが確立される。economyにpoliticalという形容詞が付きpolitical economyになった。

  politicalとは「政策上の管理」、つまり、「領主の経済管理」を意味する。

# 経済の語源：経済とは「経世済民」の略

三浦梅園に依れば、経済には二つの対立する形態がある。乾没(かんぼつ)と経済である。

- 乾没は相手から富を吸いあげる意で、「利をもって利とする」商賈[こ]（商人）の術、
- 経済は経世済民（世を経め民を済う）の略。よって、経済とは「義をもって利とする」王者の道である。

以上、小川晴久著（東京大学名誉教授）「三浦梅園の経済思想の現代的意義」、『高崎経済大学論集』vol.43(2),2000, 57-59頁からの引用

- 乾没[絞りとって無にさせる]は今日のミクロエコノミクス、経済は政治経済学＝福祉に当る。

- 2010年の自見庄三郎・内閣府特命担当大臣（金融担当）の記者会見の一節

  As a proverb goes, an economy is all about governing a society and saving its people - every single one of them.
  国民の一人ひとりの経世済民と申します。

  Tuesday, July 27, 2010, from 12:22 p.m. to 12:52 p.m. http://www.fsa.go.jp/en/conference/minister/2010/20100727.html

# 三浦梅園の経済学

梅園は『價原』で次の三つのことを強調した。

- 豊かさはお金ではなく、水火木金土穀の資源（民用）にあること。また民が豊かであること（民富）が国富であること。
- したがって為政者は民富につとめなければならず、富を自分の手元に吸い寄せようとする商人の術、すなわち乾没の手法を用いてはならないこと。国や天下を治める方法は、いつも経世済民的方法でなければならぬこと。
- その上で廉恥（れんち）礼譲の風（ふう）を興すこと。

廉とは欲がないこと、利を人に推おすこと。礼譲とは人に譲ること。

これは争奪とは反対の態度である。人に譲るとは、目上の人に譲る、弱者に譲る、自分よりもふさわしい人に譲ることである。そのためには衣食が足りなければならない。梅園は礼楽制度を作らねばならぬと言っているが、この制度は恥の感覚と譲るという精神の二つを根幹とする。

以上、小川晴久著（東京大学名誉教授）「三浦梅園の経済思想の現代的意義」、『高崎経済大学論集』vol.43(2),2000, 57-59頁からの引用

# 三浦梅園の『價原』

江戸時代の偉人：東の安藤昌益、西の三浦梅園（1723〜1789)と言われる。

- ともに医者、科学者であり、権力を得ることを目指さず、人の為に尽くした。梅園は経済学の著書『**價原**』を著したアダム・スミスと同時代人である。
- 梅園はスミスと独立に、労賃が需給調整によって変動することを明らかにした。また、無尽運動を育成、現代の信用組合の素を組織化した。

『**價原**』にはドイツ語訳がある。

Miura Baien, KAGEN Vom Ursprung des Wertes, Verlag Wirtschaft und finanzen, Dusseldorf,2001

- 経済活動は、正徳、利用、厚生これを三事に関連づけてこそはじめて人の世の為になることを説いた。
- 「水火木金土穀、これを六府と云ひ、正徳、利用、厚生これを三事と云ふ。後世の治、千術萬法有りといへども、此六府三事に出でず。」（ 三浦梅園著『價原』 ）
- 「金銀の多少は、強ひて有国者の患とすべきことにあらず唯、金銀の用は何物ぞ。米粟布帛（はく）、百の器財、庸作の用は何物ぞと察すれば・金銀の盛に行はるるの有益無益知るべきなり。」（同上）

# 手段の道徳による制限

## 手段を選ばず？？？

封建的な時代に幕府、国王、教会の権力によるイデオロギーを通じた「手段の制限」は存在した。しかし、この種の制限とは別に、資本主義が発展してくると、「手段を選ばず」利益を追求してよいのかという問題がすでに起きていた。

- **渋沢栄一「道徳経済合一説」**（渋沢は日本資本主義の父）
  - 住友総理事・伊庭貞剛「自利利他公私一如」
    - （住友の事業は住友自身を利するとともに国家を利し社会を利する事業でなければならぬ）
    - 住友電気工業（株）　経営理念
    - http://www.sei.co.jp/sei_info/vision.html
- **マーシャル「経済騎士道」**
  - アルフレッド・マーシャルはケンブリッジ大学に世界最初の経済学部を設立した大経済学者（マーシャルは現代経済学部設立の父）

# 日本語の脳

## 脳の働きと日本文化

角田忠信著

（東京医科歯科大学名誉教授）

『日本人の脳』

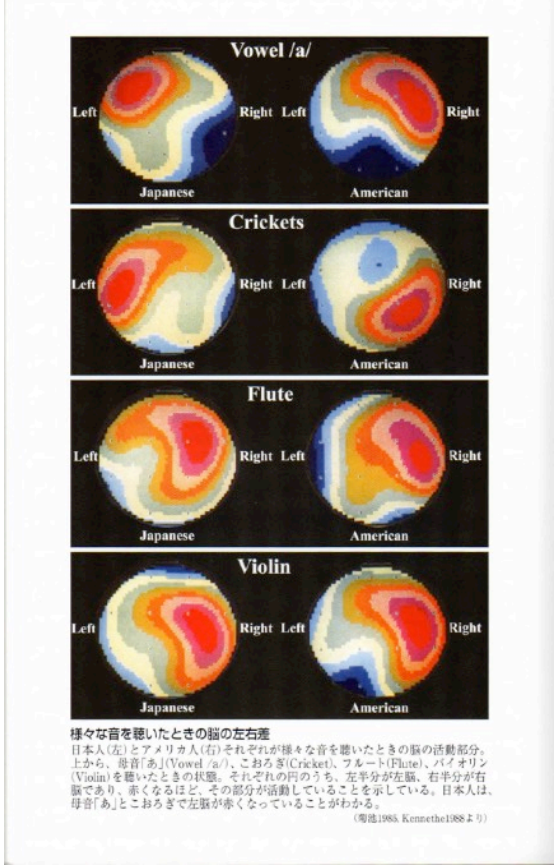
大修館書店、1978年

月本洋著

（東京電機大学教授）

『日本人の脳に主語はいらない』

講談社選書メチエ 410, 2008年



様々な音を聴いたときの脳の左右差

日本人（左）とアメリカ人（右）それぞれが様々な音を聴いたときの脳の活動部分。上から、母音「あ」(Vowel /a/)、こおろぎ(Cricket)、フルート(Flute)、バイオリン(Violin)を聴いたときの状態。それぞれの円のうち、左半分が左脳、右半分が右脳であり、赤くなるほど、その部分が活動していることを示している。日本人は、母音「あ」とこおろぎで左脳が赤くなっていることがわかる。

（菊池1985, Kennethe1988より）

# 日本人の遺伝子

## 男性

- 特別史跡　**三内丸山遺跡**

http://sannaimaruyama.pref.aomori.jp/

「北海道・北東北を中心とした縄文遺跡群」が、ユネスコの世界遺産暫定一覧表に記載されている。→　青森県縄文遺跡群HP

- **ヲシテ文字**

縄文文字「日本ヲシテ研究所」

http://woshite.com/page1.html

- **日本人の遺伝子（男性）**

Y染色体の分布（密度の大きさ順）

D2 > O2b1-47z > O3 > O2b> C1> C3

D2+O2b1で75パーセントをカバー

**縄文系**　D2　　男子の45-50パーセント

**弥生系**　O2b1　男子の25-30パーセント

O2b＊はO2b1以外のO2bを指す。

O2b*は沖縄＞本州＞朝鮮＞満州の順で頻度が高い。

O2b* 対O2b1 =1: 3

(1)中国南部・東南アジアの弥生人

O2は江南ルートから日本へ

O2b1はO2b1-47zとして国内で分岐

http://en.wikipedia.org/wiki/Haplogroup_O-M176

(2) 長江系弥生人(O3a4・O3a5)

O2と同様に江南もしくは山東から海上ルートで移動（O2aも同様）

# ヤマト

## 北畠親房「神皇正統記」

- 「此の国に漢字伝わりて後、国名を書くに字を大日本と定め、しかも耶麻土[**ヤマト**]と読ませたるなり。（中略）　字のままひのもとと は読まず、耶麻土と訓ぜり。（中略）日の本などといえる文字によれるなり、国の名とせるにあらず」（「神皇正統記」より）

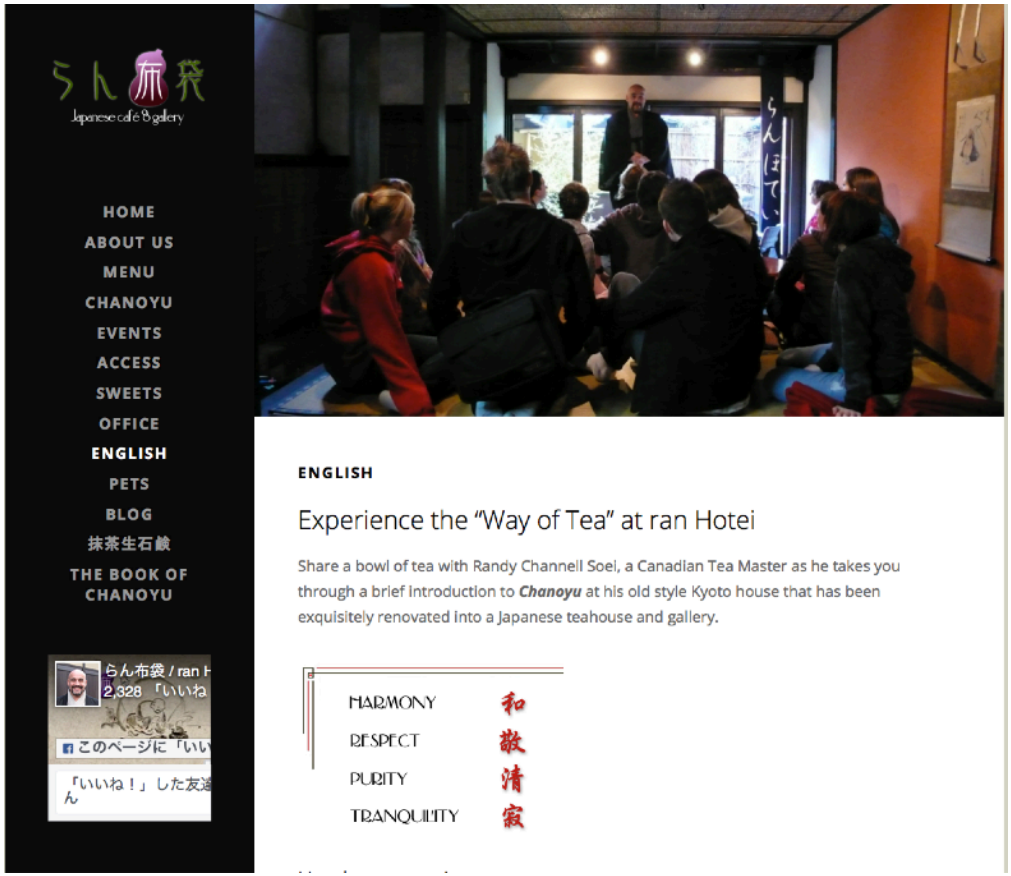
- 「日本」の訓読みは古来から「**ヤマト**」。

- 「ヤマト」の「ト」はヲシテ文字の「**ト**」（**和**の教え）に対応している。よって、ヤマトの古来の意味は和の教えを山のように大きくすること。「大和」はヤマトの宛て字としては意味内容を継承している。**ヲシテ文字**フォントは以下を参照。

  http://ja.wikipedia.org/wiki/ヲシテ

# 和敬清寂

https://ranhotei.com/english/

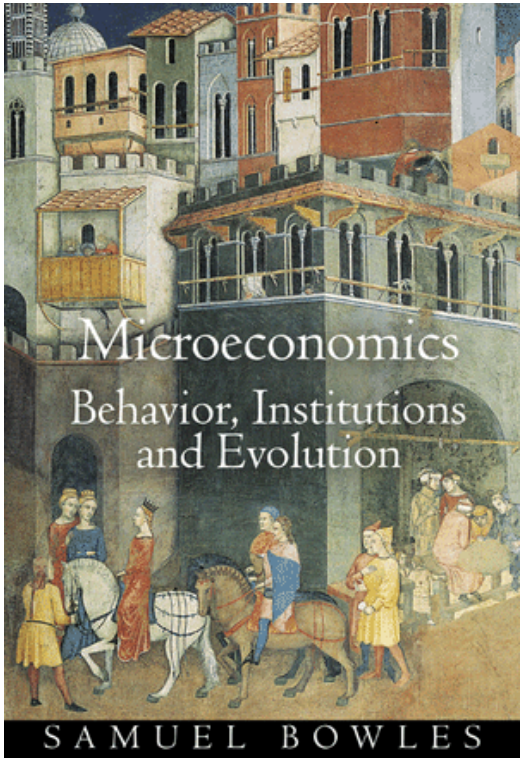


# ミクロ経済学の再構築

## Samuel Bowlesの場合

# 新しいミクロ経済学

サミュエル・ボウルズ著
『制度と進化のミクロ経済学』
エヌティティ出版、2013年




## 対立仮説

新古典派パラダイム

Equilibirum,
Greed,
Rationality
（Robert Solowの定義）

VS

サンタフェ研究所Samuel Bowles教授による三つの基本的仮定

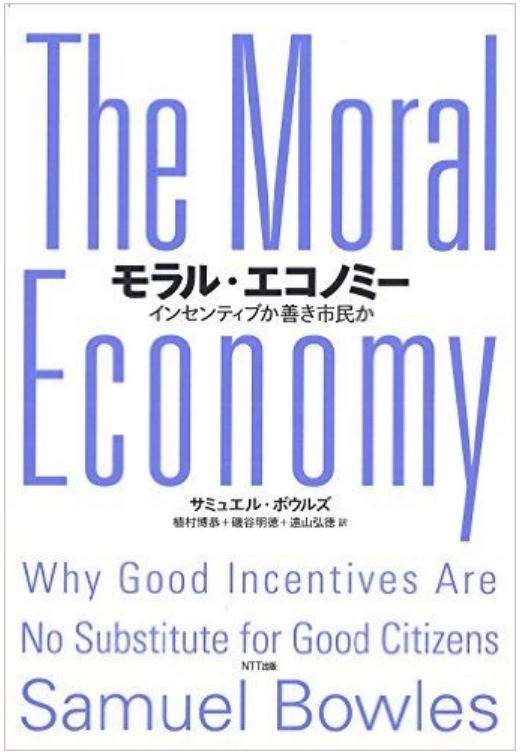
完全契約は社会的相互作用ではむしろ例外である。

適応的・他者を気遣う行動
一般的な収穫逓増

契約の不完全なところでは、他者を気遣う行動が支配的になる。

# モラルエコノミー

サミュエル・ボウルズ著(2017)



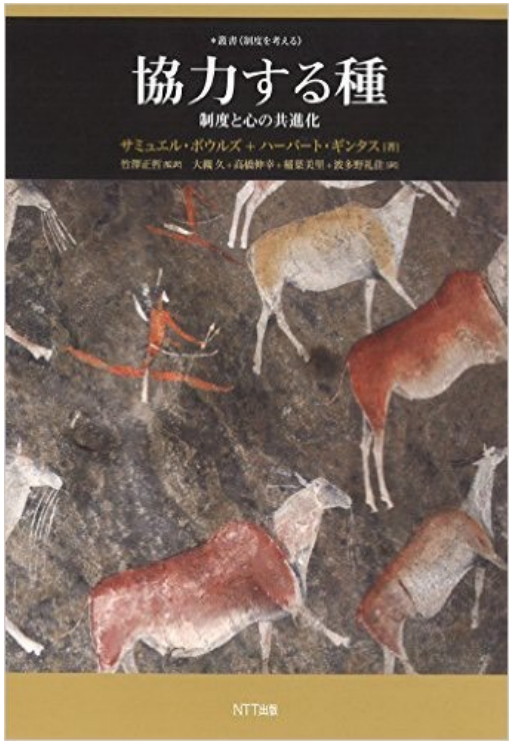

経済学と社会思想のパラダイムシフト

インセンティブと「法」だけでは、繁栄は築けない。善き「徳」に導かれた人々が不可欠である。アリストテレス、マキャベリ、ヒュームといった思想史の系譜と、実証研究、ミクロ・モデルをふまえた、きわめてアクチュアルな経済思想を展開。リベラル経済学宣言!ボウルズの経済思想の到達点。

# 協力する種

サミュエル・ボウルズ、ハーバード・ギンタス他著(2017)

制度と心の共進化




- ダーウィン『種の起源』に匹敵するボウルズ&ギンタスの主著。ゲーム理論、実験経済学、人類学、進化心理学の知見を駆使し、人類の「協力の進化」を壮大なスケールで描く
- ヒトはどうして「協力する種」になったのか。ラディカル政治経済学から出発したボウルズとギンタスが到達した社会科学の「極北」

# 経済の歪み

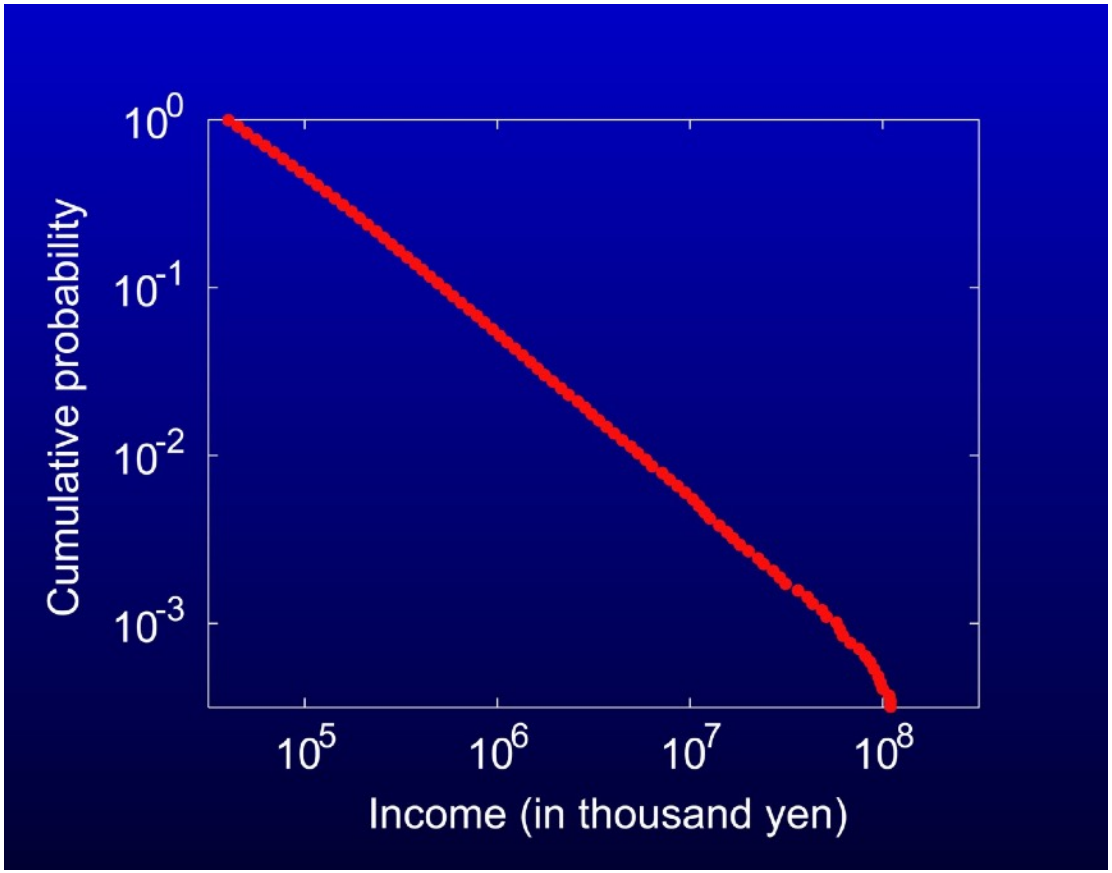
# 経済秩序の歪み

## 富と企業の偏在

- 富の偏在
  - The richest 2% of adults in the world own more than half of all household wealth, according to a new study by a United Nations research institute. (2006/12/5)
    - http://news.bbc.co.uk/2/hi/business/6211250.stm
- 巨大企業の偏在
  - 青山・家富・池田・相馬・藤原著『パレートファームズ　企業の興亡とつながりの科学』日本経済評論社、2007年
    - 所得、資本、企業サイズすべてに秩序がある。
    - 秩序は分布で見ることができる。

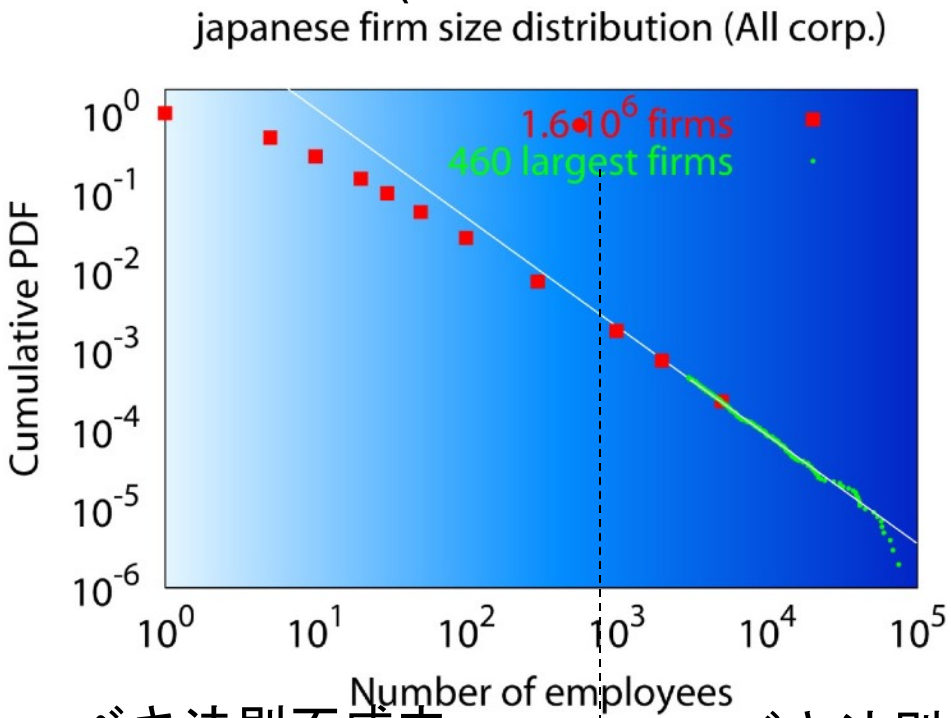
# 藤原義久教授の計測

日本の企業　上位70000企業の利潤



# 全日本160万企業の雇用数サイズ分布

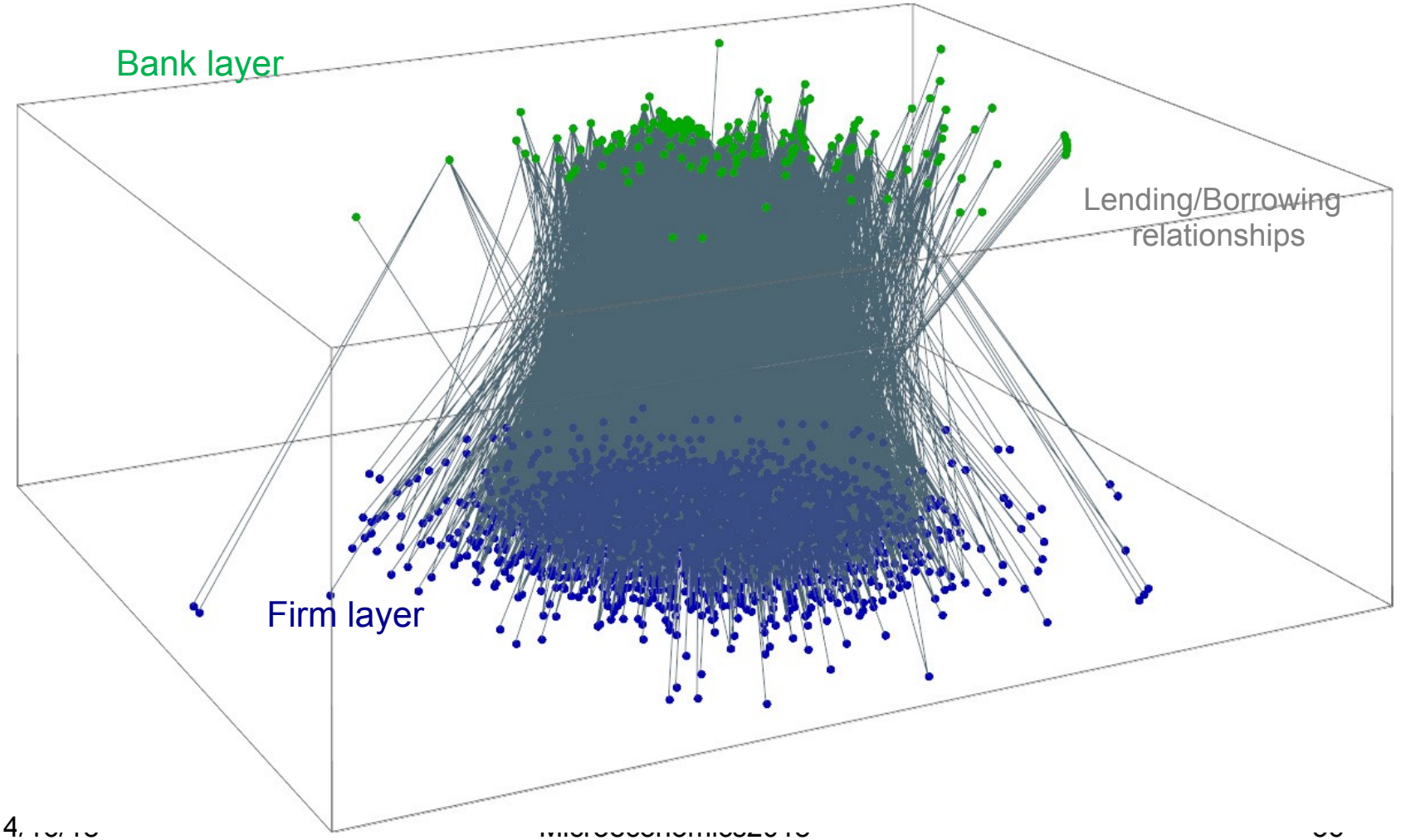
(2001年)




| | ベキ法則不成立 | ベキ法則成立 |
|---|---|---|
| # firms | 1.6 million (99%) | 12,000 (1%) |
| # employees | 60% | 40% |

# 日本における銀行-企業の貸借ネットワーク2010

青山秀明・S. Batiston・藤原義久作成



# 富の不平等の拡大

## 米国の例

### G. William Dunhoff教授

庶民の生活にとって貨幣は交換手段としてしか重要性を持たないと言ってよい。これは次の数字を見れば一目瞭然である。

G. William Dunhoff教授 (カリフォルニア大学サンタクルーズ校社会学部教授)のホームページ

http://sociology.ucsc.edu/whorulesamerica/power/wealth.html

にWho rules America というページがあるが、そこに米国の富の構造が詳しく紹介されている。

2007年時点の推計で、富の分布ではボトム85パーセントの人々は全体の15パーセントの富しか保有していない。さらに興味あることに、正味金融資産ではボトム80パーセントの人々は全体の7パーセントしか保有していないのである。もっともこの事実は米国ではこの半世紀それほど大きく変わったわけではない。

### 米国の不平等

Total Net Worth

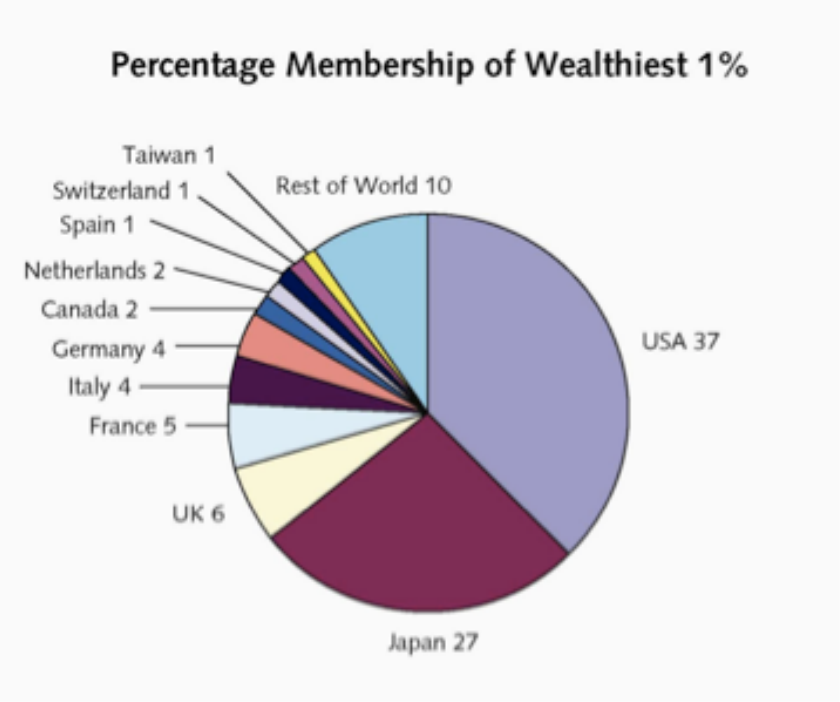
| | Top 1 percent | Next 19 percent | Bottom 80 percent |
|---|---|---|---|
| 1983 | 33.8% | 47.5% | 18.7% |
| 1989 | 37.4% | 46.2% | 16.5% |
| 1992 | 37.2% | 46.6% | 16.2% |
| 1995 | 38.5% | 45.4% | 16.1% |
| 1998 | 38.1% | 45.3% | 16.6% |
| 2001 | 33.4% | 51.0% | 15.6% |
| 2004 | 34.3% | 50.3% | 15.3% |
| 2007 | 34.6% | 50.5% | 15.0% |
| 2010 | 35.1% | 53.5% | 11.4% |
| 2013 | 36.7% | 52.2% | 11.1% |

Financial (Non-Home) Wealth

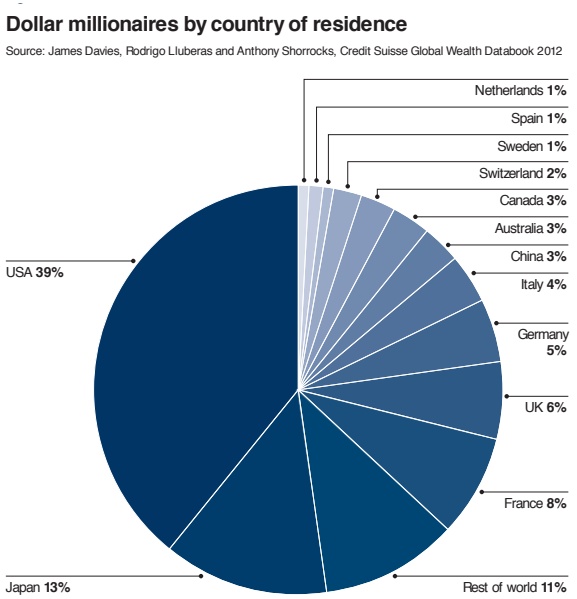
| | Top 1 percent | Next 19 percent | Bottom 80 percent |
|---|---|---|---|
| 1983 | 42.9% | 48.4% | 8.7% |
| 1989 | 46.9% | 46.5% | 6.6% |
| 1992 | 45.6% | 46.7% | 7.7% |
| 1995 | 47.2% | 45.9% | 7.0% |
| 1998 | 47.3% | 43.6% | 9.1% |
| 2001 | 39.7% | 51.5% | 8.7% |
| 2004 | 42.2% | 50.3% | 7.5% |
| 2007 | 42.7% | 50.3% | 7.0% |
| 2010 | 41.3% | 53.5% | 5.2% |
| 2013 | 42.8% | 51.9% | 5.3% |

# 不平等の国際的構造

**James B. Davies, Susanna Sandstrom, Anthony Shorrocks, and Edward N. Wolff (2009), The World Distribution of Household Wealth, NBER Working Papers 15508**




**Credit Swisse Global Wealth Report 2012**



# ベキ分布とスケール不変性

## 別名　パレート分布

ある事象の発生の分布f(x)がベキ則に従っていなら、

$$f(x)=x^{-\alpha}$$

ベキ分布にはスケール不変性という性質がある。

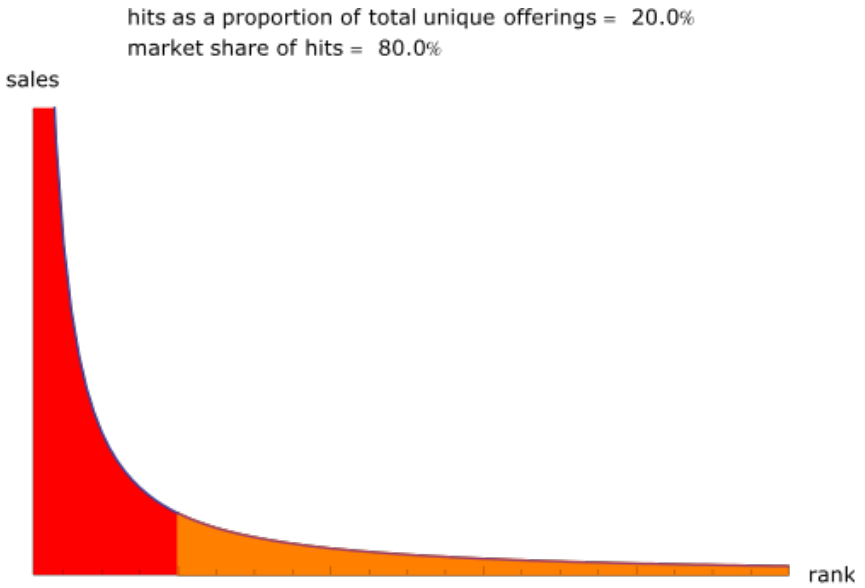
ベキ分布は分布の偏りを特徴づける平均的な尺度（スケール）を持たない。このとき、いくらでも大きな事象の発生を許容する。

ベキ乗で表せる状態がはフラクタル（自己相似）である。実際、α>0としてf(x)=x^-αにx/bを代入すれば、

$$f(x/b) = (x/b)^{-\alpha} = b^{\alpha}(x^{-\alpha})$$

スケールが異なってもx^-αというx-依存性は変わらない。

## 市場シェアと製品の順位



# パレート分布の性質

- ある集団の人間の寿命xが確率変数であるとする。寿命xは0歳の場合もあるし100歳の場合もある。理論上は∞歳。すべての可能性が確率的現象でその現象はある分布に従うとする。

- その集団で0歳時点で瞬間的に死んだ人の累積数をF(0)とする。0歳までに死んだ人の数をF(0)とする。一方、1-F(0)はその集団で0歳時点で100歳まで生きる可能性を示す。これは数学的に書けば、

  $R(0)=1-F(0)=\int_0^{\infty} f(x)\,dx$

- 一般に、x歳で死ぬ確率はf(x)、x歳までに死んだ人の累計は$F(x)=\int_0^{x} f(x)\,dx$。一方、x歳以降生き残る人の可能性は、$R(x)=\int_x^{\infty} f(x)\,dx$。

- ゆえに

  $R(x)=\int_x^{\infty} f(x)dx=1-F(x)$

- したがって、

  $f(x)/(1-F)=$
  「x歳時点で死ぬ可能性」対「x歳以降生き残る可能性」

である。この比を「故障率」(failure rate)と呼ぶ。

- 故障率はxの関数である。

- いま、xが増加するとき、比が増加するか、減少するかという問題を考える。以上の推論を所得に置き換え、寿命xを所得xと置く。

- 故障率がxの増加とともに大きくなるならば、**パレート分布**が発生する。

- 「故障率がxの増加とともに大きくなる」＝「所得xが大きくなると所得を稼ぐ力が増大する」ということである。

→「**フラクタル法則**」

# ジニ係数

## ローレンツ曲線からジニ係数へ

所得の低い者から順に並べて累積人数を縦軸にプロットする。このように描かれた曲線で、縦軸も横軸も累積比率で1の長さに規準化しておく。こうして描かれた曲線を**ローレンツ曲線**と呼ぶ。

図では図形Ｂの弧線形がローレンツ曲線Lorenz Curveである。

ジニ係数＝A/(A+B)

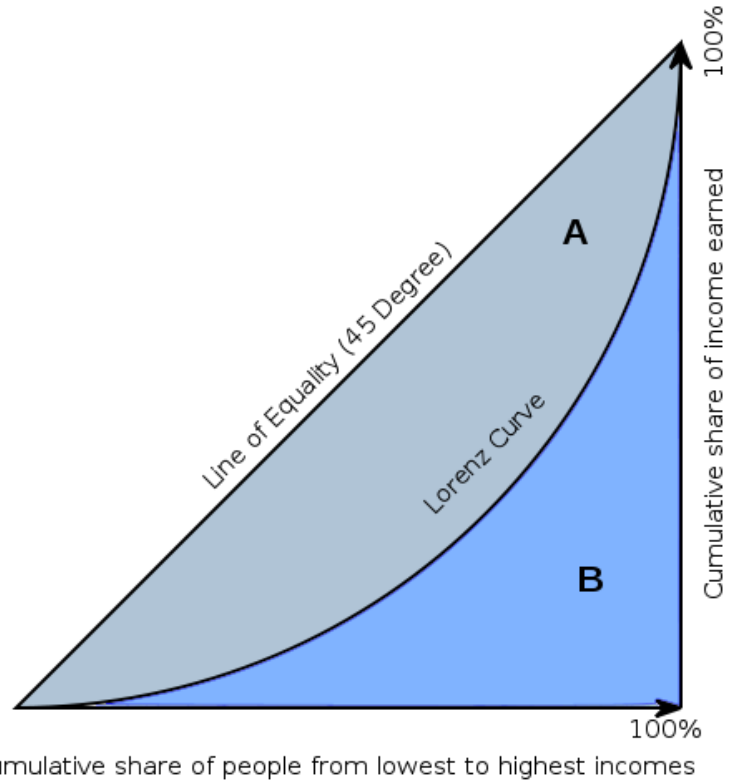
面積Aがゼロならば、三角形の面積（A+B）とローレンツ曲線の面積が一致するので、ジニ係数は1である。これが完全平等のケースである。

なお、図は横軸の長さ、縦軸の長さがともに1である。よって、三角形の面積（A+B）は1/2である。

ゆえに、

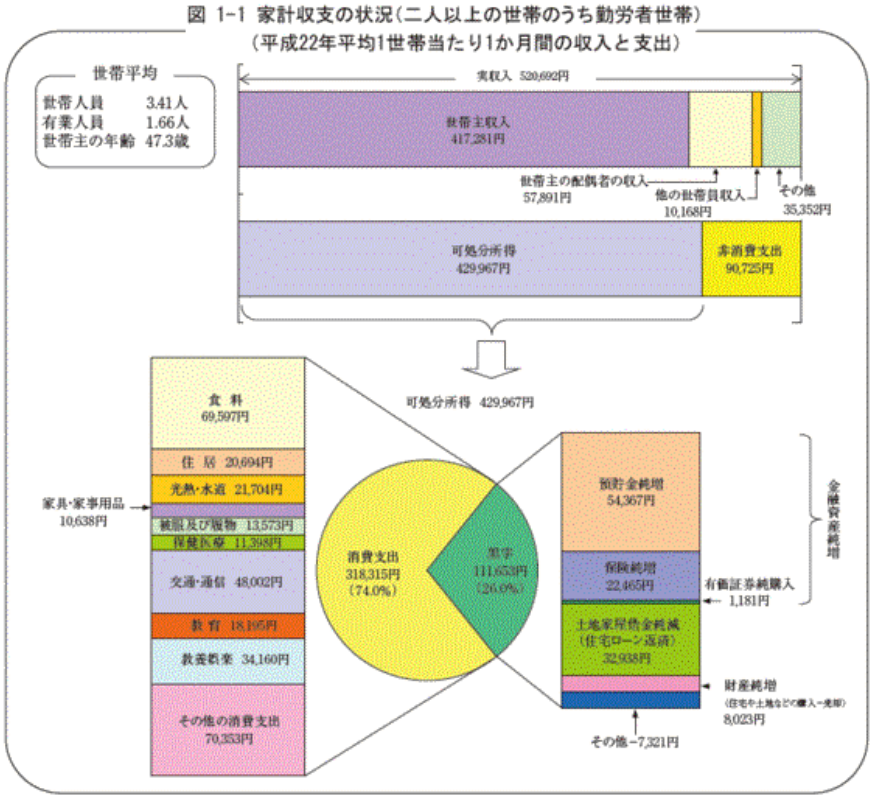
ジニ係数＝A/(A+B)＝A/0.5=2A

**http://en.wikipedia.org/wiki/File:Economics_Gini_coefficient2.svg**



# 家計簿からみたファミリーライフ

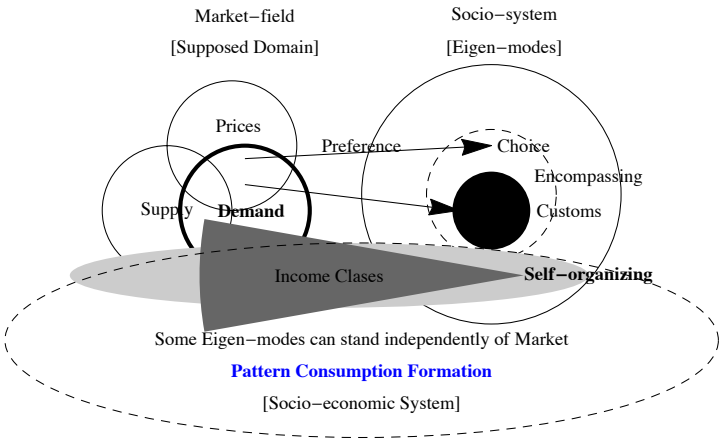
平成23年8月総務省統計局



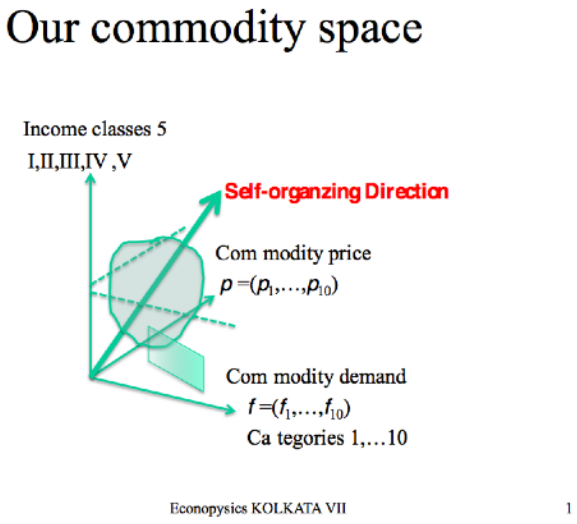
# 消費活動

## household demand

消費の自己組織化




需要法則



# サービス経済

# 資本主義の目的の変遷

「目的」「対象」「要求水準」に変遷がある。

企業の目的の変遷
- 利潤最大化
- 販売・シェア最大化
- 株価最大化　現在、M&Aはこの観点から正当化される。
  - 目的の変遷の背後には制度の変遷がある。

生産の対象の変遷
- 物財主体の生産
- サービス主体の生産
- 情報主体の生産

消費者の要求水準の変遷
- 純個人主義的要求
- 逐次的・相互依存的要求

# 新しい階級の創成とサービス科学

Creative Classの誕生：創造的価値の創出；Richard Florida　(University of Tronto)による。

http://ja.wikipedia.org/wiki/リチャード・フロリダ

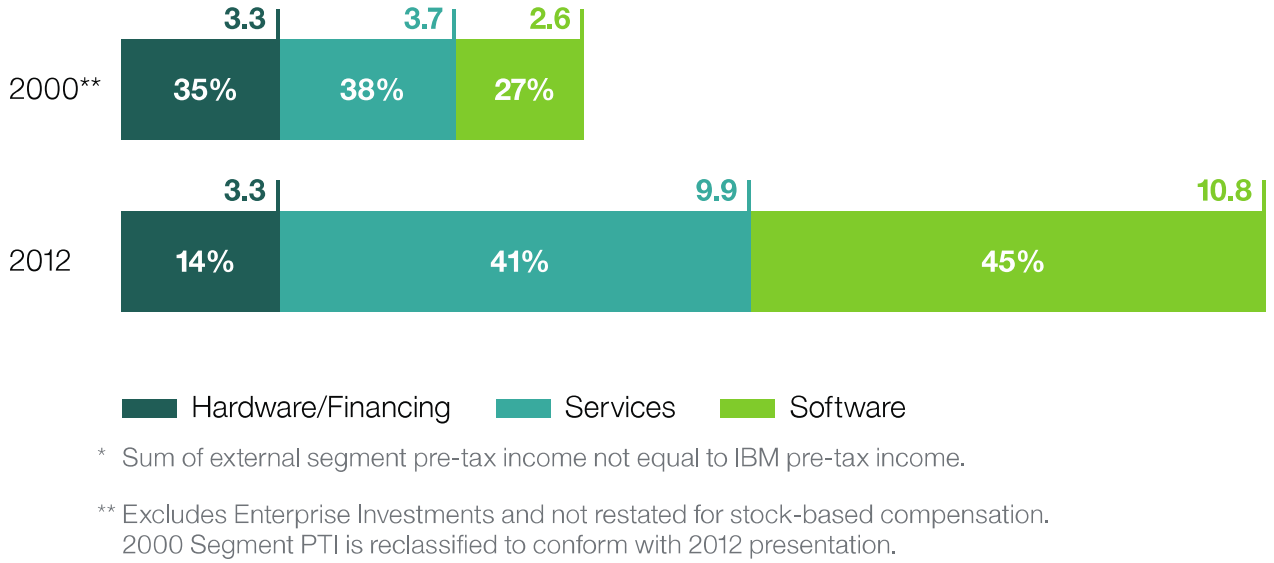
- 先進国には30パーセント程度存在。
- サービス生産はGDPの70パーセント程度
- サービス従業員は全体の60パーセント程度
- サービス生産によるサービス購入は80パーセント、サービス部門の自己発展

IBMは2004年にサービス科学を提唱。

- IBM　Almaden Research Center
- http://www.almaden.ibm.com/asr/SSME/index.shtml
- IBMは1990's に業績不振、 Gerstner, Louis V., Jr 会長（2002年末まで）のときにサービスに着目。 2003年Samuel J. Palmisano 会長CEO就任とともに対外的にもサービス創造を展開。
- SSME Activites
- SSME: Service Science Management & Engineering

すでにわが国を含む世界各国でサービス科学の展開が政府レベルの重要な活動になっている。

# コンピュータ製造業におけるサービス生産



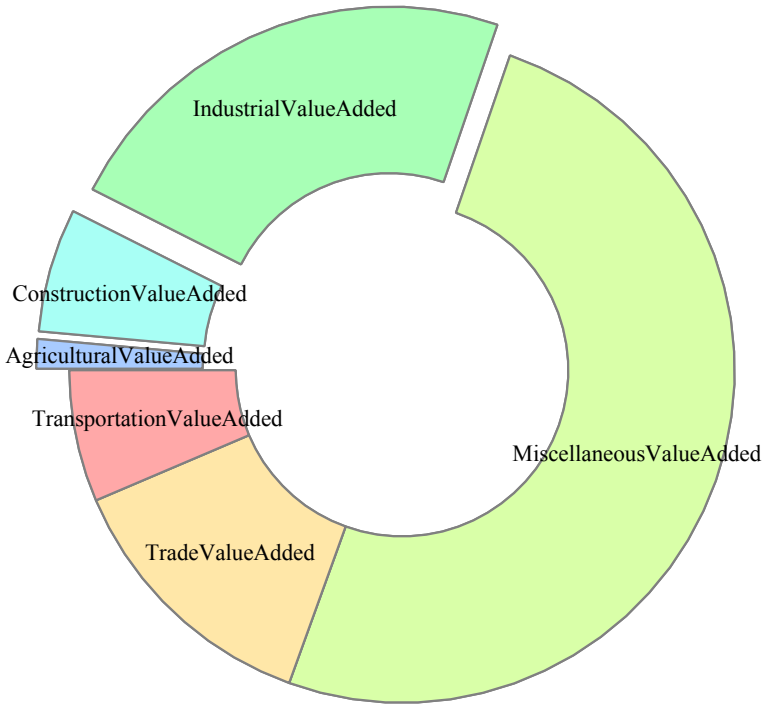

* Sum of external segment pre-tax income not equal to IBM pre-tax income.

** Excludes Enterprise Investments and not restated for stock-based compensation. 2000 Segment PTI is reclassified to conform with 2012 presentation.

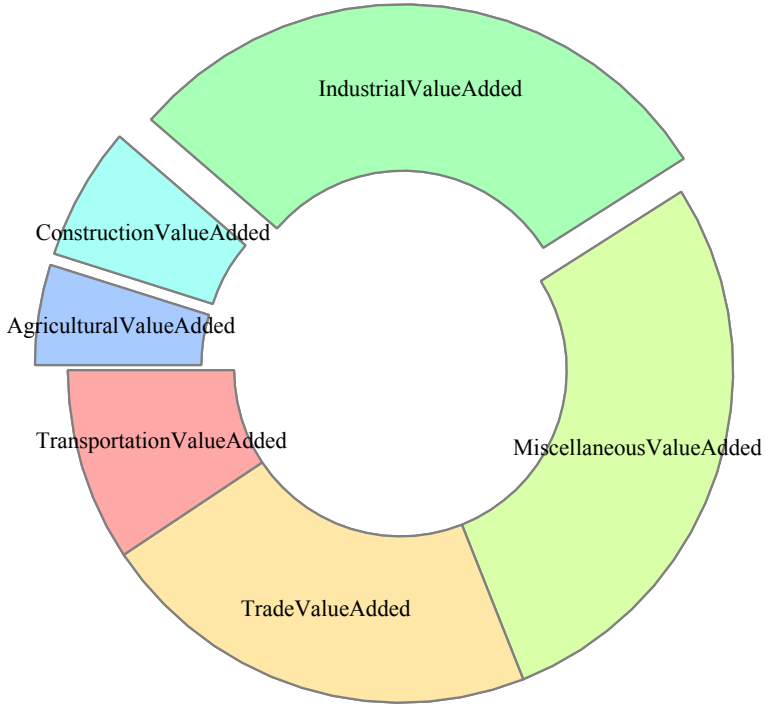
**About 50%** of IBM segment profit expected to come from Software by 2015.

# サービス経済の支配

**Japan 2010**




**Russia 2010**



# 新しい10の経済原理

(Vargo=Lusch 2004, J. Marketing)

1. 経済の交換はサービスの交換が基本である。交換の最終目的はサービス間で行われる。

2. サービスの交換を貨幣的な商品交換が覆っている。

3. 財交換はサービスを提供するための分配を目的としているにすぎない。

4. 作用している資源こそが競争に勝つ基本資源である。作用する資源をオペラント資源と呼ぶ。

5. 経済の本質はサービス経済である。車をつくるのも車という物体ではなく車に関連するすべてのサービスを提供することが目的である。

6. 顧客もつねに価値創造の担い手である。生産者だけが価値をつくる時代は終わった。

7. 企業が価値を手渡すことはない。価値をつくる取引条件をオファーするにすぎない。

8. サービスに基づく見方こそ顧客志向・顧客相関的な見方である。

9. 社会的かつ経済的に登場する主体はみな資源を統合する人たちであり、企業だけが資源を統合しているのではない。

10. 価値は受益者の価値創造の観点からつねに一意的に決まるものであり、消費者の独立的な効用が市場価値を選ぶのではない。オープン価格の時代。

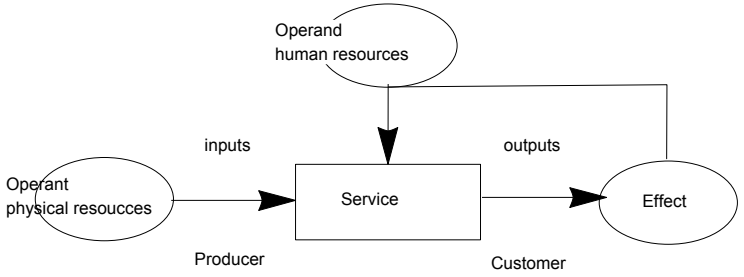
# サービス商品特性

伝統的財とはまったく異なる商品特性

- サービスは触知できない。供給者からも消費者からも単体として見えにくい（触知不可能性Intangiblity）。
- 生産過程に消費が入り、生産と消費は分離できない。また継続的に生産、消費しなければならない（分離不可能性Inseparability）。
  - 生産と消費は同時に行われる。（同時性simultaneity）
  - イノベーションに消費者のフィードバックfeedbackが常に必要
- 供給者から提供される同じサービスも場所、環境および能力、精神条件などの異なる消費者には異なるサービス享受となる。（異質性Heterogeneity）
- サービスは在庫として保有できない。ホテルの部屋数は短期では増減できない（腐食性Perishablity）。
- 価値を単独に創出することができない（価値共同創造value co-creation）。

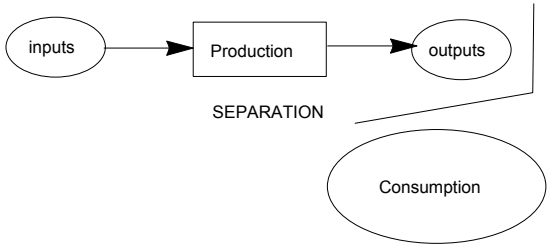
# サービス生産の捉え方

## サービス生産




Customer cannot be separted from the production process in order to complete its final product

## 伝統的生産関数



# 市場と競争

市場取引にかんする定型化された事実、
取引所取引のメカニズム

# わが国の市場の歴史(1)

- わが国は江戸時代に近代的先物取引を開始した最先進国であり、板寄せ、ザラ場、売・買建玉、値洗い、乱手の禁止など当時から使用されたと思われる取引用語は現在もなお東京証券取引所で完全利用されていることは驚嘆すべき事実である。
  - http://www.tse.or.jp/glossary/gloss_s/sa_zaraba.html
- これは1730年（享保5年）幕府が正米取引（直物取引）のほかに一種の先物取引を含むいわゆる信用取引を大坂（大阪ではない）堂島の米相場会所に対して公認したことに遡る。現在の東京証券取引所で使用されている取引用語の古さは、江戸時代の取引所取引の完全性ばかりでなく取引技術の独自性を立証するものである。
- **人工市場U-Mart研究会**　http://www.u-mart.org/html/index-j.html

# わが国の市場の歴史(2)

- 重要なことは、このときすでに、現物の決済とは直接関係のない「帳簿」の上だけの商いが行われていた点である。つまり、「売買と同時に正米の受渡しをせずに、帳面上で行う米の売買取引」が行われたことから、大坂堂島の米市場を「**帳合(ちょうあい)商い**」と呼ぶ。
- 商品取引所はアントワープでは1531年、ロンドンでは1568年に開設されているが、これは現物（直物）取引である。日本においても1730年以前に正米取引は盛んであった。堂島の米相場の公認は帳合商いの形で先物取引を実現したことに近代的意義がある。
- ヨーロッパではチューリップなどオプション取引が古くから行われている。取引の公正概念が堂島と異なっている可能性がある。

# 金相場会所

- 相場が建てられたのは帳合米相場だけではない。金（貨幣）についても相場が建てられた。

- 江戸時代、江戸は金遣、上方は銀遣といわれ、金銀の相場は難しい問題であった。幕府は1700年（元禄13年）に、金1両につき銀60匁、また銭についてはこれより古くから、1609年（慶長14年）に金1両に鐚4貫文と定めていたが、後の寛永通寶はこの鐚銭同様の金1両に銭4貫文と定められた。しかし、需給関係で公定相場通りにはいかず、自ずから金相場、銀相場がたてられることになった。

- 公許は1725年（享保10年）9月

  Source1: https://ja.wikipedia.org/wiki/金相場会所

  Source2:http://www.nnn.co.jp/dainichi/rensai/naniwashimi/120523/20120523056.html

# 競争

- **市場内部の競争**
  - オークション、入札
  - 大量生産
- **市場間の競争**
  - **裁定取引**arbitrage
  - 商品取引、為替市場
- **裁定取引**

江戸時代にすでに**裁定取引**が組み込まれていた。「飢饉・不作などを原因として米価高騰が生じている場合には、両価格の乖離は大きなものとなり、つねに帳合価格の上昇は正米価格のそれを下回っていた。この事実は…帳合米価格が正米価格とは異なる条件にもとづいて決定されたことをしめしている。」新保(1978, 47注4)

この引用からさらに次のことが引き出せる。つまり、正米の価格変動が大きいときは、帳合米への裁定のルートがあり、当時すでに現物と先物の裁定が行われたことを意味する。

堂島米先物(帳合米)市場

# 本間宗久と酒田五法

## ロウソク足分析 Candle stick chart

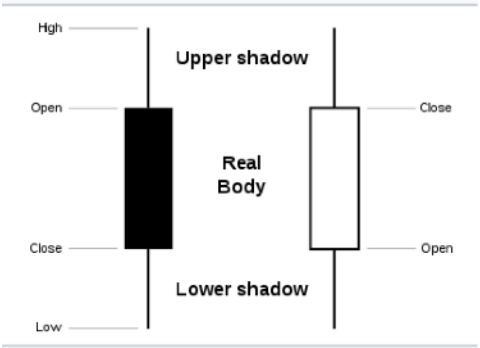
- 酒田五法 （さかたごほう）とは、出羽国（現在の山形県酒田市周辺）出身の江戸時代の相場師本間宗久によって考案されたローソク足の並びを基本としたテクニカル分析のひとつ。

  https://ja.wikipedia.org/wiki/酒田五法

- 本間 宗久（ほんま そうきゅう、1724年（享保九年） - 1803年（享和三年）。酒田人名録では本間古作。通称を久作。出羽庄内（現在の山形県酒田市）出身。江戸時代の米商人で、酒田・大坂・江戸での米の商いで莫大な富を得たとされる。後に徳川幕府の上杉鷹山を補佐した酒田の豪商本間光丘は甥。大坂・堂島の相場師牛田権三郎と並び称される。

  https://ja.wikipedia.org/wiki/本間宗久

- **ロウソク足**　本間宗久が発案し、世界的に普及。
  - 始値よりも終値が高い**陽線**（ようせん）
  - 始値よりも終値が安い**陰線**（いんせん）
  - 古くは陽線が赤、陰線が黒で書き表された。
  - open　とくに前場で最初についた取引を**寄り付き**
  - close とくに後場の最終の取引（またはその値段）を**引け**
  - high　最高値
  - low　最低値



# 取引所とその他の市場の相違

取引所について、事前に以下の諸点を確認しておく必要がある。消費財やオークションとは重要な相違点がある。市場を一括して議論することはできないのである。

- 商品取引所ではオークションの競売品とは異なる財を扱う。穀物などは同質的な商品が大量に出回る。
- オークションのルールに「再販売の可能性」が導入される。実は、これは売り手と買い手が「入れ替え可能」であることを意味する。
- 商品取引所では、「私的価値」（他人から影響を受けない限界効用）についても修正が必要である。消費財市場のような場合、成行注文は存在しない。再販売を考えることができるのは、「共通価値」があるからであり、このような価値は通常、消費財ではなく資本サービスにかんするものである。
- 商品取引所に参加するエージェントは、ブローカーであって、私的価値をもつ通常の消費者ではない。
  - 有賀裕二著『進化経済学の数理論入門』共立出版2004年15-16頁

# 市場の例。取引所について

- 日本は市場最先進国
  - 大坂堂島帳合米相場
- 市場（魚市場、野菜市場など）の仲買人、競売人
  - 仲買人も競売人も専門職である。
    - 熟練と専門知識を必要としている。
  - 築地、マルセイユ、アンコナの魚市場の制度、規則は同一でない。
- 仲買人は果たして悪か？
  - 産地直送は本当に市場問題を解決しているであろうか？
    - 「主婦連」も「満州国」設立者たちもともに仲買人は悪と考えた。
  - 流通機構の寡占化と市場主義は矛盾している。

# 「板寄せ」による今期の板情報と売買の原理

**指値注文**

売りは指値以上の価格なら売る。売りの指値が$p_s$円以上の買い注文ならすべて受け入れる。

買いは指値以下の価格なら買う。買いの指値が$p_d$円以下の売り注文ならすべて受け入れる。

**成行注文**

市場の成行きに任せる。自分では指値をしないで、取引は市場が決めた価格に従って行う。

成行売りだけの状態は最低の指値$p_s$円以下で存在。

成行き買いだけの状態は最高の指値$p_d$以上の値段で存在。

- $p_d$円で応じる$S$単位の売り注文数量が$D$単位の買い注文数量より大きければ売れ残りが生じる。$S > D$
- その結果、$p_d$円では売買は成り立たず、売り手は$p_d$円より低い注文に応じることになる。たとえば、$p_d > p_s$のような$p_s$で売る。

ゆえに、$p_d$円では売買が成り立つためには

$$p_d \geq p_s$$
$$D \geq S$$

でないといけない。

# 売買の売りと買いの集計

| 成行売り | 売注文計 | 指値$p$ | 買注文計 | 成行買い |
|---|---|---|---|---|
| 15 | | 1798 ～ | | 30 |
| 15 | 82 | 1798 | | 30 |
| 15 | 73 | 1793 | | 30 |
| 15 | 38 | 1779 | | 30 |
| 15 | 44 | 1778 | | 30 |
| 15 | 91 | 1776 | | 30 |
| 15 | | 1770 | 37 | 30 |
| 15 | 93 | 1763 | 6 | 30 |
| 15 | 57 | 1759 | 23 | 30 |
| 15 | | 1758 | 34 | 30 |
| 15 | | 1741 | 71 | 30 |
| 15 | | 1733 | | 30 |
| 15 | | 1729 | | 30 |
| 15 | | 1719 | | 30 |
| 15 | | 1684 | 21 | 30 |
| 15 | | ～1684 | | 30 |

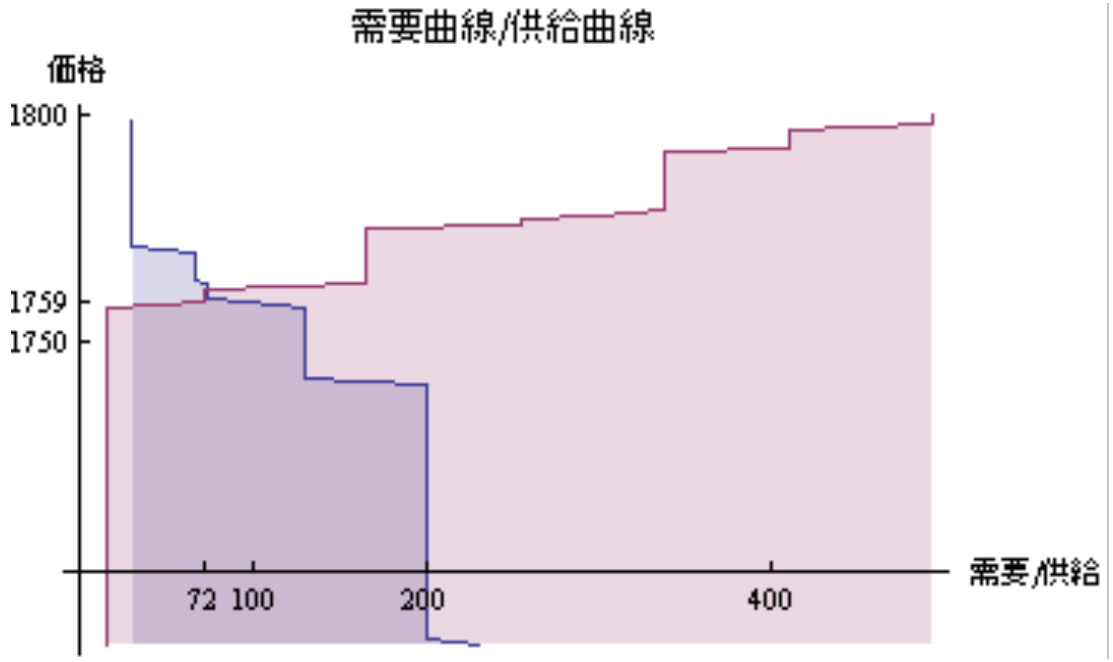
| 供給量 | 価格 | 需要量 |
|---|---|---|
| 493 | 1798～ | 30 |
| 493 | 1798 | 30 |
| 411 | 1793 | 30 |
| 338 | 1779 | 30 |
| 300 | 1778 | 30 |
| 256 | 1776 | 30 |
| 165 | 1770 | 67 |
| 165 | 1763 | 73 |
| 72 | 1759 | 96 |
| 15 | 1758 | 130 |
| 15 | 1741 | 201 |
| 15 | 1733 | 201 |
| 15 | 1729 | 201 |
| 15 | 1719 | 201 |
| 15 | 1684 | 222 |
| 15 | ～1684 | 222 |

# 板寄せによる約定価格と均衡数量

| 供給量 | 価格 | 需要量 |
|---|---|---|
| 493 | 1798～ | 30 |
| 493 | 1798 | 30 |
| 411 | 1793 | 30 |
| 338 | 1779 | 30 |
| 300 | 1778 | 30 |
| 256 | 1776 | 30 |
| 165 | 1770 | 67 |
| 165 | 1763 | 73 |
| 72 | 1759 | 96 |
| 15 | 1758 | 130 |
| 15 | 1741 | 201 |
| 15 | 1733 | 201 |
| 15 | 1729 | 201 |
| 15 | 1719 | 201 |
| 15 | 1684 | 222 |
| 15 | ～1684 | 222 |

- 取引は**1759**円と**72**単位で約定。
- 1759円で残りの24枚の買い注文は次期に繰り越されることになる。
- 価格が上から下がってくる場合ならば、1763円の売りは1770円でも売れるから、1770円で約定可能。
- U-Martの場合、1770円と1759円の平均値を約定価格とする。

# 供給曲線と需要曲線



# 市場の特性　相手を特定できないこと。

- 売買は、自己売買を除けば、相異なるエージェントが売りと買いに分かれて相対して取り引きを行うという意味で、相互作用である。

- しかし、各「板」で、見かけ上も、売りのエージェントと買いのエージェントを特定することはできない。「見かけ上」ということはまた同時に「事前に」ということも意味する。事前に相対するエージェントを特定できるならば、もはや市場の必要はないのである。ここに「市場の重要な特性」（市場の秘密）が隠されている。

- エージェントは互換的に浮動しているが、この浮動性は顕在化してはならないのである。事後的に探索可能であっても、事前には見えない取引でないといけない。

- **最近のM&Aは市場外相対取引が多くなっている。市場と資本主義の関係を再考すべきである。**

# JPX売買制度の解説ページ

http://www.jpx.co.jp/equities/trading/index.html

- 内国株の売買制度

http://www.jpx.co.jp/equities/trading/domestic/index.html

- ToSTNeT(Tokyo Stock Exchange Trading NeTwork System)取引

http://www.jpx.co.jp/equities/trading/tostnet/index.html

- 売買の規制

http://www.jpx.co.jp/equities/trading/regulations/index.html

- 約定取消しルール

http://www.jpx.co.jp/equities/trading/cancel/index.html

- 信用取引

http://www.jpx.co.jp/equities/trading/margin/index.html

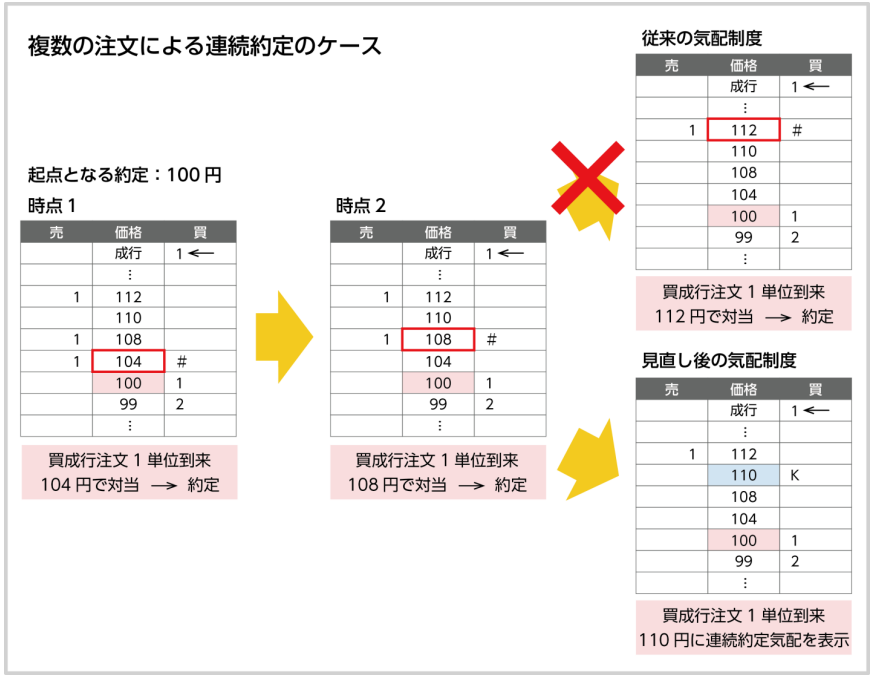
# ザラバによる売買（東証による例題）

## 成行買500が生じたケース

http://www.jpx.co.jp/systems/equities-trading/files/arrowhead/swf/nariyuki_arrowhead_1000.html

# 最近の約定ルール制度変更

http://www.jpx.co.jp/systems/equities-trading/tvdivq00000002uk-att/arrowhead_renewal.pdf




上図のとおり、起点となる約定（本ケースでは 100 円と仮定）から 1 分以内に更新値幅の 2 倍を超える水準で連続的な約定が生じた場合は、即時に約定せず、更新値幅の 2 倍の値段に連続約定気配を 1 分間表示します。（本ケースでは、更新値幅 5 円×2 を加えた 110 円に表示）

# 取引の自動化に対応した変更 (2012年)

- 市場取引はもはやヒューマンの関与する余地が少なくなっている。マシンによる自動取引が主流である。
- コンピュータが取引と決済の場を与えるばかりでなく、トレーだの取引自体も自動化されている。人間の脳は１分を切った急変動には対応できない。つまり、人間による取引はもはや巨大化した証券取引には適合しないのである。
- ２ミリ秒の世界。ミリ秒とは秒の1000分の１である。東京証券取引所システムでは、平成24年１月にリリース稼働された次世代売買システムarrowheadで、システムを以下のように更改している。

① 2ミリ秒の注文応答時間を実現

② 2.5ミリ秒の情報配信時間を実現

http://www.tse.or.jp/rules/stock/arrowhead/info.html

- **TED COM: ケヴィン・スラヴィン「アルゴリズムが形作る世界」**

**http://www.ted.com/talks/kevin_slavin_how_algorithms_shape_our_world.html**

# 東証Arrowhead（現物）

http://www.jpx.co.jp/systems/equities-trading/01.html

サービス概要 | システム概要 | ご利用までの流れ | ISV一覧

## arrowhead

arrowheadは、2010年1月4日に稼働した、世界最高水準の高速性・信頼性・拡張性を兼ね備えた、現物商品の売買システムの呼称です。その後、注文件数の増加、短時間での注文集中、投資家の新しいニーズ等の株式市場の環境変化に対応するため、2015年9月24日にリニューアルしています。
対象取引は現物商品にかかるオークション取引(株式、CB等)です。

arrowheadリニューアルについて

動画で見るarrowheadリニューアル（富士通株式会社ウェブサイト）

## システムの特徴

### 高速性

| 項目 | 処理能力 |
|---|---|
| 注文応答時間 | 約0.3ミリ秒 |
| 情報配信時間 | 約1ミリ秒 |

# ミリセコンドからマイクロセコンド決済へ（2016年)

http://www.jpx.co.jp/systems/derivatives-trading/01.html

先物取引　2016年7月19日から稼働(大阪取引所OSE)

## J-GATE

大阪取引所（以下「OSE」という）は、当社デリバティブ市場について、国内外の幅広い投資家の皆様に認知いただき、ご利用いただくため、そのシンボルとなるデリバティブ売買システムに"J-GATE"というネーミングを付けています。

"GATE"は、"Global Access Trading Engine"の頭文字をとったもので、海外から日本へ・日本から海外への入り口というグローバル感を表現しています。また、"GATE"からシステムの堅牢さも意味しています。
ロゴマークは、"GATE"の「G」を2本の曲線で形作ることにより、変化へのスピード感を表現しています。

## システムの特徴

### 世界最高水準のパフォーマンス

Nasdaq 社のGenium INET Tradingを採用

現行システムよりも高速な処理レイテンシと高いスループット性能を実現。世界最高水準のシステム性能で投資家の皆様にとってより利便性の高い市場へ。

| | J-GATE | 旧J-GATE（参考） |
|---|---|---|
| 注文処理レイテンシ（平均）(注) | 100マイクロ秒 | 2ミリ秒 |
| 注文処理スループット（全体） | 約100,000件／秒 | 12,000件／秒 |

（注）「注文処理レイテンシ」は、注文取引を受信してから板登録が完了しその応答を返すまでの内部処理時間を計測したものです。

# 市場機構は事前に予定されていない（ナシム・ニコラス・タレブ）

市場のパフォーマンスは予測可能ではない。それは市場内のエージェントたちの技能に依存しているだけである。優れたエージェントがいても、相対するエージェンントの行動にたえず影響を受けている。安定的な環境の下においてさえ、エージェントの能力によって、市場のパフォーマンスは異なった結果になる。したがって、効率市場仮説のような事前の調和説を採るべきではない。

未知のことに対処することはブラックスワン理論（ナシム・ニコラス・タレブ）以外には不可能。未知に対処するためには莫大な費用と時間を要する。したがって、以下が成り立つ

- 市場に参加するには、熟考した戦略が必要になる。—> 右欄ナシム・ニコラス・タレブ（１）

- 市場組織は時代に即応して修正していく必要がある。—> 右欄ナシム・ニコラス・タレブ（２）

- **ナシム・ニコラス・タレブ（１）**
  オプション価格は、オペレータのヒューリスティックによって決定されるのであって、数理モデルによって決定されるのではない。数理モデルは「鳥に飛び方を教えるようなもの」だとした。
  —->ハイエクは市場は未知のものを顕示する機能を強調したが、市場はそのままでは何も働かない。オーストリア学派の市場賛美論は問題の半分しか語っていない。

- **ナシム・ニコラス・タレブ（２）**
  我々は、起きたことを尊重し、起きたかもしれないことは無視する。言い換えれば、我々は、浅く表面的であることが自然であり、本質を知らない。これは、心理学的問題ではない。これは、情報の主たる属性に起因している。月の陰の部分は、見えにくく、そこを照らそうとすると、エネルギーを必要とする。同様に、見えない部分に光を当てようとすることは、概念的にも精神的にも、エネルギーを要する。

# 遺産配分CG解法
# ゲーム論入門

# 「特殊な場」を設定することによる詭弁

例。小田晋の死刑存続肯定論

- 平安時代末期に実際にあった「馬泥棒の申し開き」
  - 武士である主君に馬の調達を命令された。主命に欺けば殺されるが、馬を盗んでも殺されない（平安時代、死刑は廃止されていた）
- これから、死刑があったら、泥棒は思いとどまると推理できるであろうか？

- 死刑があれば窃盗は躊躇されるかもしれないが、これは窃盗を躊躇させる唯一の方法ではない。これから、死刑存続論を一般化するのは飛躍である。
  - 実際には、死刑がなくても窃盗を抑止することができる。主君と実行犯人を共同正犯とすればよいだけである。
    - 難波紘二「覚悟としての死生学」文芸春秋、2006, 97-99ページ

# 最後通牒ゲームと合理解の異常性

**最後通牒ゲーム**　Ultimatum Game

「あなたは１００万円を渡される。１００万円のうちいくらかは友人に渡さないといけないが、友人が貰う金額を拒否するなら、あなたも取り分を失う。さて、あなたはいくら友人に渡したらよいのか？」

- **人間の脳は間違いを犯すばかりでなく、「合理解」をつねに望むとはかぎらない。**

- 最近、認知科学では、「合理的選択」に脳のどの部位が関与するかを解明してきている。
- VMPFC : the ventromedial prefrontal cortex　（前頭葉腹側正中）とFPC : the frontopolar cortex （前頭葉前頭極）の障害のある患者は功利主義的選択（最後通牒ゲームの「不公正に見える」経済的合理解）への強い選好を示す。
  - Koenigs et al.　**Nature**446 (2007)によれば、VMPFCの障害のある患者は情緒的な選択の傾向がある。
  - 以上、Koenigs, M. et al. (2007)およびKoenigs, M. and Tranel, D. (2007)を参照。

# 3人の子供で17頭の馬の遺産を分ける方法

## 例題

- 村の長老が１頭馬を連れてきて18頭にして、長男には９頭、次男には６頭、
- 三男には2頭を配分した。そこで長老は1頭余った自分の馬を持ち帰った。
  - この例題は2008年12月の忘年会の席で滝田賢治教授（中央大学法学部）より教えられた。哲学者の叔父さんから聞き半世紀近く解法がわからないでいた。
- この例題はRobert Aumannが2000年の時を経て解いた「タルムードの解」と同じ問題であることはすぐにわかる。

## 配分原理

- 条件付きの「権利が完全に満たされない場合（割り切れない）の配分原理」
- 条件: 長男は1/2以上、次男は1/3以上、三男は1/9以上
- 配分２つのステップで計算される。
  - 最低保証額
  - 残余均等配分
    - 最後通牒ゲームでは最低保証額がゼロ

# 最低保証額と残余均等配分

## 最低保証額

- 長男は1/2以上、次男は1/3以上、三男は1/9以上
- このとき、まず最低保証は
  - 長男　17/2=8.5　整数8頭しか受け取れないので0.5の損
  - 次男　17/3=5.67　整数5頭しか受け取れないので0.67の損
  - 三男　17/9=1.9　整数1頭しか受け取れないので0.9の損
- 長男8頭、次男5頭、三男1頭を最低保証額と呼ぶ。

## 残余均等配分

この配分の余りは

17-(8+5+1)=3

なので、余りの3頭を長男、次男、三男に1頭ずつ再配分する。

このとき、依然として、

長男9頭 > 次男6頭 > 三男2頭

で、順序不変性が維持されている

# なぜ長老の登場が必要か？

- 残余均等配分には 最後通牒ゲームの原理が利用されている。つまり、相手がオファーする額が１頭であっても、自分の馬が１頭増える以上、拒絶するのは馬鹿であるという原理。
- この原理が守られるならば、１頭でももらえない側はかならずオファーを拒否する、そして、拒否された場合、オファーする者の配分も没収される。
- したがって、没収する人が必要。これが **長老**。
- 長男が余り３頭すべてを要求するなら、長老は、次男と三男に１頭でも配分しないかぎり、長男の持ち分も没収する、と言う。
  - その結果、馬の例では１頭を分割できないので、３頭のうち２頭を次男、三男に1頭ずつ渡さないといけない。
    - ◇ この原理は馬の場合、再分割ができないという条件のためにうまく働く。しかし、１万円の場合１円を渡せばよいということになって奇妙な結果が発生するであろう。

# タルムード破産問題と提携ゲーム
# ミシュナの配分表

ある人が亡くなり、遺産を上回る負債が残った。債権たちはこの人の遺産をどのように配分すべきか。これはイスラエルの古代の教典『タルムード』に数値例題で示唆されていた。このような配分法はタルムードの律法『ミシュナ』に述べられていることから、「ミシュナの配分表」と呼ぶ。

遺産額 Eとする。E = 100, 300, 450の場合をそれぞれ考察する。

負債額 Dとする。ここで diは債権者 iの債権額。$D = d_1 + d_2 + d_3 = 100+300+500 = 900$

| 債権者1の債権額 | 債権者2の債権額 | 債権者3の債権額 | 配分原理 |
|---|---|---|---|
| $d_1$=100 | $d_2$=300 | $d_3$=500 | |
| 100/3 | 100/3 | 100/3 | 均等 |
| 50 | 125 | 125 | 不明 |
| 50 | 150 | 250 | 比例 |

# 順序保存性と単調性

- 議論のため、債権者の債権額を低い方から番号順に並べ替える。
  - $0 \leq d_1 \leq d_2 \leq d_3$
- このとき、債権者に配分される額 $x_i$をつぎのように**順序保存性**と**単調性**を満たすように決めると、ミシュナの配分表が導かれることがわかる。
- **順序保存性**
  - (1) $0 \leq x_1 \leq x_2 \leq x_3$
  - (2) $0 \leq d_1 - x_1 \leq d_2 - x_2 \leq d_3 - x_3$
- を満たすとき、 (1)を受取額の順序保存性、(2)を不足額の順序保存性が保たれると言う。実際、表 1より以下が成り立つ。
  - 受取額の順序保存性 $0 \leq 50 \leq 125 \leq 125$
  - 不足額の順序保存性 $0 \leq 100 - 50 \leq 300 - 125 \leq 500 - 125$
- **単調性** $\partial E / \partial x_i \geq 0$
- 債権ベクトル $d = (d_1, d_2, d_3)$が与えられたとき、遺産額 Eが大きければ大きいほど、各債権者の受取額 $x_i$は大きくなる可能性がある。
  - 実際、**ミシュナの配分表**の第 1列 100/3, 50, 50を取れば、$E = 100 < 300 < 450$にたいして $100/3 \leq 50 \leq 50$が成立っている。よって、**単調性**が満たされている。
    - $\partial E / \partial x_1 \geq 0$.

# CG解法：２人破産問題のCG法

Contested Garment Principleの解法を略して**CG法**と呼ぶ。

債権者は 2人 i =1, 2とする。債権者 1が最低保証される受取額は、遺産 Eから「残りの債権者 2の要求額」を控除したものである。実際、

$v(1) = E - d_2$;　 0 if $E - d_2 \leq 0$
である。v(1)は債権者 1にとっての最低保証額である。

一般に、これを特性関数 v(j)[債権者 jにとっての最低保証額 ]を用いて表す。

**$v(j) = \max\{E - d_i, 0\}$**

ゆえに、

$E \leq d_2 \rightarrow v(1) = 0$
$E \geq d_2 \rightarrow v(1) = E - d_2$
$E \leq d_2 \leq d_1 \rightarrow v(2) = 0$
$E \geq d_2 \leq d_1 \rightarrow v(2) = E - d_1$
$d_1 \leq d_2$であるので、 $0 \leq E - d_2 \leq E - d_1$

# 残余均等配分

債権者 1は自分の最低保証額のほかに 2人の最低保証額の残余 E– (v(1) + v(2))を 2人で均等に分割したものを受け取るとする。このとき債権者 1の受取額 $x_1$はつぎのようになる。

$$x_1 = v(1) + ½\{E– v(1) – v(2)\}$$
$$= ½\, v(1) – ½\, v(2) + ½\, E$$

$E = 0 \rightarrow v(1) = 0,\ v(2) = 0 \Rightarrow x_1 = 0$

$E = d_1 \rightarrow v(1) = 0,\ v(2) = 0 \Rightarrow x_1 = ½\, d_1$

$E = d_2 \rightarrow v(1) = 0,\ v(2) = E– d_1 \Rightarrow x_1 = ½\, d_1$

$E = d_1 + d_2 \rightarrow v(1) = d_1,\ v(2) = d_2 \Rightarrow x_1 = d_1$

債権者 2も自分の最低保証額プラス 2人の最低保証額の残余の半分を受け取るとする。

$$x_2 = v(2) + ½\,\{E– v(1) – v(2)\}$$
$$= ½\, v(2) – ½\, v(1) + ½\, E$$

$E = 0 \rightarrow v(1) = 0,\ v(2) = 0 \Rightarrow x_2 = 0$

$E = d_1 \rightarrow v(1) = 0,\ v(2) = 0 \Rightarrow x_2 = d_1$

$E = d_2 \rightarrow v(1) = E– d_1,\ v(2) = 0 \Rightarrow x_2 = d_2 – ½\, d_1$

$E = d_1 + d_2 \rightarrow v(1) = d_1,\ v(2) = d_2 \Rightarrow x_2 = d_2$

# 囚人のディレンマと利己主義の原理

# 囚人のディレンマ

- 囚人のディレンマという名称は、ある事件で警察に拘置され取り調べを受けている「2人の囚人」が話題となることに起因している。
  - プリンストン大学1951年　Tucker教授による。
  - 囚人のディレンマはナッシュ均衡かつ支配戦略均衡である。

- 警察は、2人を別個の部屋に入れて、「相棒を共犯者と認めればお前は釈放だが、相棒だけがお前を共犯者と認めた場合には、相棒が釈放になってお前だけが一番重い罪・懲役５年をかぶることにあるであろう」と脅かします。ただし、「どちらも共犯を素直に認めた場合は，御上にも慈悲があり、罪を軽減して懲役３年になるように計らう」と言って自白の誘導をします。

| | | 相手 | |
|---|---|---|---|
| | 戦略 | 相手が否認 | 相手が自白 |
| 自分 | 否認戦略 | 懲役2年 | 懲役5年 |
| | 自白戦略 | 無罪 | 懲役3年 |

# 囚人ディレンマの利得表

| | | 相手 | |
|---|---|---|---|
| | 戦略 | 相手が否認 | 相手が自白 |
| 自分 | 否認戦略 | 懲役2年 | 懲役5年 |
| | 自白戦略 | 無罪 | 懲役3年 |

| | | 容疑者2 | |
|---|---|---|---|
| | 戦略 | 否認戦略 | 自白戦略 |
| 容疑者1 | 否認戦略 | (−2, −2) | (−5,0) |
| | 自白戦略 | (0, −5) | (−3, −3) |

# 歌劇トスカのディレンマ

| | | 警察署長<br>スカルピア | |
|---|---|---|---|
| | 戦略 | Blank bullet | Live bullet |
| 歌姫トスカ | Bed | (50, 50) | (−600, 500) |
| | Stab | (500, −600) | (−500, −500) |

- 500>50>−500>−600;　50 ＞ (500−600)/2[=−50]

- **歌劇トスカ**の例題の場合、ゲームは１回かぎりのゲームで、前回のゲーム結果を参照しながら、ゲームの繰り返しを考えることは適当でありません。

- いまの例題では，古今東西の戯曲が好む「**絶対的な愛**」とか「**マフィアのオメルタ** omerta」のような制裁がないかぎり，いったん陥ったディレンマから脱する道はありません.

# 囚人のディレンマ解

- 各容疑者の「利得最大化の観点」からいえば、相棒の容疑者が否認してくれさえすれば、自白戦略をとることが最良。これによって、自分は釈放されることになり利得は最大値0になる。

- ところが，**両者ともに**、どちらも相棒は裏切ることはないであろうと推測して自分だけ「抜け駆け」してしまおうと考えるとする。その結果，両容疑者とも自白戦略を採れば，両容疑者にとって、自白戦略はけっして自己の利得最大化なることはない。
  - 相棒が自白戦略をとる場合には、相棒が否認戦略をとる場合と較べて、否認戦略の容疑者の利得は–2 から–3 になって明らかに低下する。この利得低下は容疑者1、2の双方に共通。

- ゆえに、容疑者1および2が、それぞれ利得最大化を目指して、自白戦略をとるならば、利得は(–3,–3) となり、双方が否認戦略をとる場合の利得(–2,–2)より明らかに悪化する。
  - (–2,–2) > (–3,–3)

# 囚人のディレンマ　2人バージョン

- **条件**
  - c > a > d > b;　　c+b<2a
  - 0 > –2 > –3 > –5を代入すればよい。
    - c > a > d >b
    - aがbとcの平均より大きい
- **（強）支配戦略：**
  - 相手のプレイヤーが如何なる戦略を取ろうとも、自分の戦略集合のなかで、絶対的に有利な戦略がある。
  - 上記の場合、これは第2 戦略である。

| | 相手の協調 | 相手の裏切り |
|---|---|---|
| 自分の協調 | *a* | *b* |
| 自分の裏切り | *c* | *d* |

# 経済例題　利得表

- 寡占企業は価格支配力をもち、価格設定をつうじて需要をコントロールする。そのための**価格政策**として、高価格政策や低価格政策がある。企業1も企業2も互いに価格戦略を所与として行動する。
- 販売拡張のため、両企業ともに**広告支出**が必要となる。
  - 広告支出が増加すれば販売は拡張する。しかし、広告支出の過大な増大は結局はその企業の利潤を悪化させる。
  - さらに2企業が同時に広告すれば，1企業だけが広告する場合と較べて，各企業にとって販売増加の効果はきわめて低くなる。

| | | 企業2 | |
|---|---|---|---|
| | 戦略 | 価格戦略 | 広告戦略 |
| 企業1 | 価格戦略 | (200, 200) | (50, 300) |
| | 広告戦略 | (300, 50) | (150, 150) |

# 囚人のディレンマ　経済例題

- 寡占市場： 製造業のようないくつかの産業では，市場をわずか数企業だけで集中的に支配していることがあり、このような市場と企業を寡占市場と寡占企業と呼ぶ。
- **複占市場：** 2企業だけで市場を支配できるような場合を「複占duopoly」と呼ぶ。
  - 複占市場は米国の航空機製造のボーイング社とロッキード社のようなケース。もっとも戦闘機売り込みを想定するとなると、相手は政府になるので、正常的な需要理論はあてはまらない。
- とにかくほぼ定性的に同水準の商品を提供できる2社が市場を独占して，互いに広告をつうじて競争（非価格競争）を展開するような情況を想定する。
  - 便宜のため、2企業に番号を付して、企業1、企業2と名付ける。

# 支配戦略

- 両企業とも，自己の利得最大化の観点からは，競争相手が価格戦略だけをとろうが広告戦略をとろうが，広告戦略をとることが最良策。
- このような戦略をゲームの理論では「**支配戦略dominant strategy**」と呼ぶ。
- **ゲームの均衡**は「支配戦略」によって特徴づけられる「**支配戦略均衡**」になる
- こうして，企業１と企業２は「囚人のディレンマ」の情況に陥る。
- 価格戦略　**協調戦略** cooperation [C]
- 広告戦略　**抜け駆け戦略** defection [D]
- **結局、囚人のディレンマは、抜け駆けという利己的戦略が協調を崩し、共倒れになるということ。**

# 繰り返し（反復）ゲーム

# 協調か抜け駆けか

- **囚人例題：** 2人の囚人は互いに情報交換により「結託あるいは提携coaltion」を形成することができない。→**非協力ゲーム**

- **市場における提携形成：** 2企業は、合法か違法かは別問題として、たがいに提携を形成することが可能。両企業とも広告戦略はけっして採用しないという提携によって、両企業とも，最悪の情況(150,150) から利潤(200,200) に引き上げることができる。

- **抜け駆け（提携のディレンマ）：** 競争相手が提携を遵守してくれさえすれば、お互いに相手を裏切ることが魅力的になる。実際、「**抜け駆け**」により提携が保証する利潤200 よりも魅力的な300 の利潤をつかむことができる。この可能性があるかぎり、疑心暗鬼が生じ、結局は「囚人のディレンマ」の情況から脱却することができない。

- **問題（「抜け駆け」禁止の制裁の可能性）：**

  上記2企業が提携を破棄した場合に罰金を支払うことに同意したとせよ。この罰金の額をいくらにしたら、各企業は「抜け駆け」することを躊躇するであろうか。

# TFT 戦略/トリガー戦略

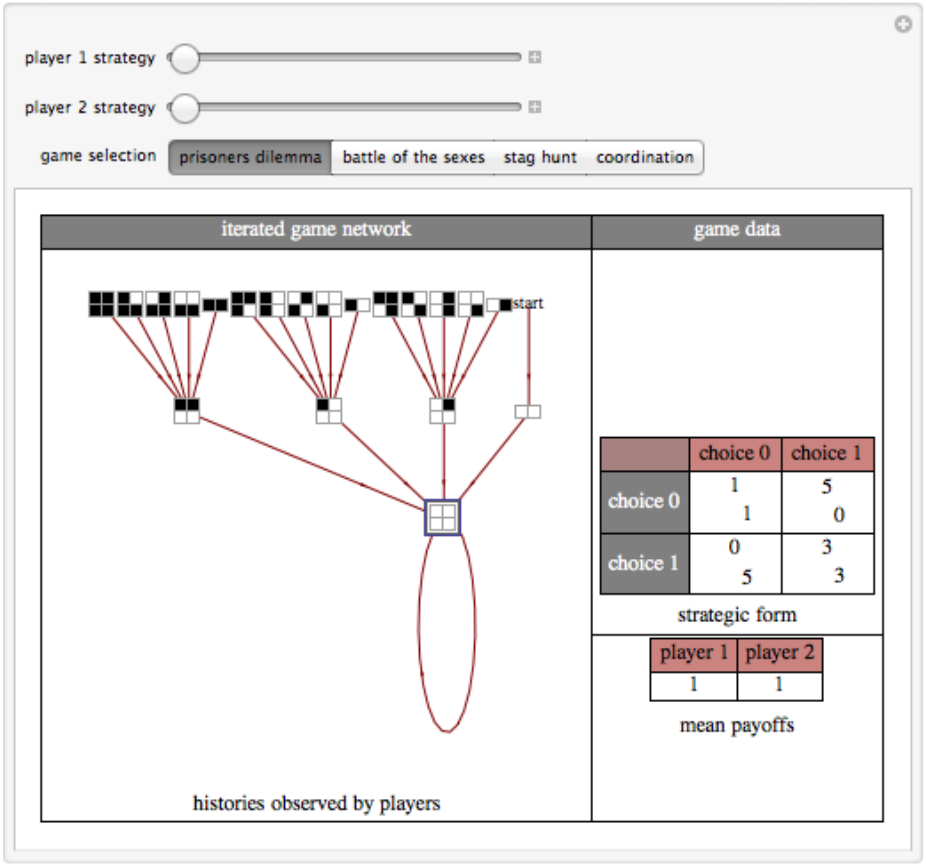
- 繰り返しゲームでは、将来の利得の総和がより大きくなることが戦略選択の基準である。
- しかし、抜け駆けが共倒れを導くことを知っている。
- ここで、初期には、協調戦略Cを選ぶ。
- ところが、自分がCを選び続けることが相手にわかるなら、どこかで、相手はDを選んで（裏切って）利得を増加させることができる。
- 相手が裏切ったときかならず**報復**を行う。この報復で自分も損するが、相手が利得最大を目指してくるのに対して相手の利得も最小化することである。このような戦略を**ミニマクス戦略**という。この報復が合理的なことは、**フォーク定理**（次の頁）で証明される。
- 相手の裏切りは単なるキーボード操作ミスかもしれないので、一回相手が裏切りをしても、すぐに報復しない。しかし、相手に自覚させるため、報復は行う。また、相手が裏切り戦略停止したら、すぐに元の協調戦略Cに戻る。このような柔らかな戦略は**Tit for Tat**と呼ばれる（打つ強さはTit < Tatである。）。略して**TFT戦略**と呼ぶ。
- このように初期時点に協調を選び、相手が裏切ったとき、程度の差はあれ、しっぺ返しを行い、相手が協調に戻れば、再びに協調を行う。このような戦略を**トリガー戦略**と呼ぶ。

# フォーク定理（民間伝承の定理）

- 将来の利得評価の割引率が１に近いものとする。このとき、無限回の繰り返しが可能なゲームで、トリガー戦略こそが、他の戦略と比較して、平均的に大きな利得を獲得できる。
  - 証明はRobert Aumann（ノーベル賞受賞）のものが有名である。なお、簡単な証明は教科書（有賀「ミクロ経済学入門」）の402-407頁を参照してください。
- これは証明なしに歴史上、経験的に知られていた命題で、**民間伝承の定理**という意味で**フォーク定理**と呼ばれる。自己を犠牲にして**しっぺ返しをしない民族は滅びる**だけであるという**教訓**がゲーム論でフォーク定理として定式化された。

# Iterated games

http://demonstrations.wolfram.com/IteratedGames/



# 繰り返しゲームの多様性

- 前ページのゲームはプレイヤーは2期間ごとの**ゲーム履歴**を参照にしてゲームを行う。
- その結果、ゲーム樹の状態は計1+4+16=21状態となる。
- したがって、戦略数が2個でプレイヤーが2人の場合、ゲームの可能なアクション数は$2^{21} \times 2^{21} = 2^{42}$**[4.4兆]**
- この例では
  - プレイヤー1が戦略1398101
  - プレイヤー2が戦略1973785
- を用いるとき、**TFT(tit-for-tat)戦略となっている。**

# ゲームの状態数、アクション数

- 各ゲームの状態数

  Othello game $10^{28}$
  Chess $10^{50}$
  Go game [Igo 囲碁] $10^{160}$

- 各ゲームのアクション数

  Othello game $10^{58}$
  Chess $10^{123}$
  Go game [Igo 囲碁] $10^{400}$

- 人工知能の圧倒的勝利　**AlphaGo**

https://ja.wikipedia.org/wiki/AlphaGo

# 囚人のディレンマ解と現実生活

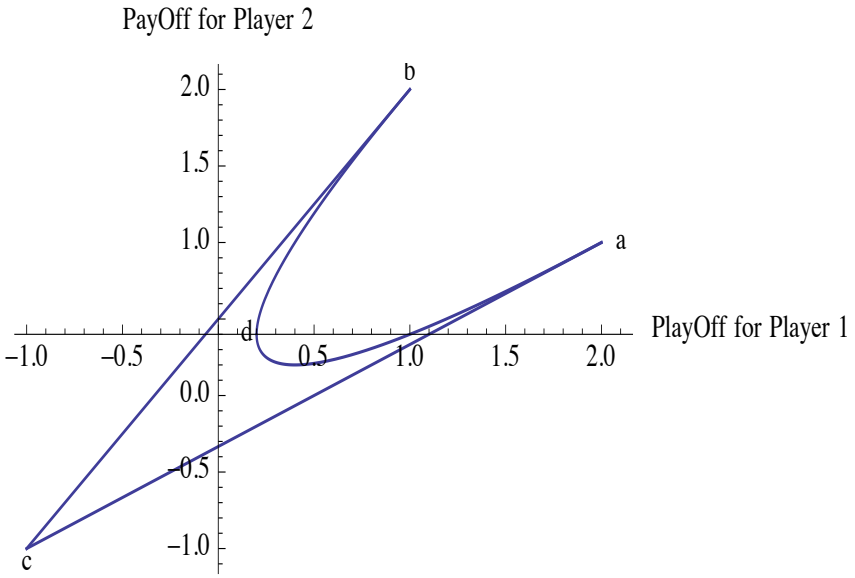
- 囚人のディレンマ解の一意性にただちに異議を唱えたのは心理学である。現実にはたえず多様な解が発生する。
- コンピュータシミュレーションが可能になってから莫大な数の相互作用の組み合わせを検定できるようになった。また過去の履歴を考慮できるようになった。併せて新たに問題発見的な（heuristic） 解を見つけることができるようになった。
- 多数のエージェントによるランダムマッチングによる繰り返しゲームを考慮に入れて新たにフレーミングすると、エージェントゲームの記憶を通じて、裏切りが回避される方向を導出できる。
- Nowak MA, Sigmund K (1993) A strategy of win-stay, lose-shift that outperforms tit for tat in Prisoner's Dilemma. Nature 364 (6432):56–58. Bibcode:1993 Natur 364…56 N. doi:10.1038/364056a0

# 逢い引きのディレンマ

- 大学の教室の例を引こう。太郎は花子と「相思相愛」である。太郎も花子も講義に出席すれば逢い引きできる。しかし、講義をサボっていつもの場所に珈琲を飲みに行っても逢い引きできる。ただし、真面目な太郎は講義出席による逢い引きの得点は高く、勉強嫌いな花子は講義出席による逢い引きの得点は低い。これと対照的に、講義欠席による逢い引きの得点は太郎は低く、花子は高い。もちろん、両人の戦略がチグハグになり逢い引きが不首尾に終われば、ともに同じ失点となる。

- さらに大学の講義は1 年又は半年の講義なので、このゲームは有限回であるが「繰り返しゲーム」である。したがって、純粋戦略ではなく「混合戦略」を採ることができる。つまり、出席、欠席、欠席、出席などという順に繰り返し戦略を実行することができる。

| | Taro出席 | Taro欠席 |
|---|---|---|
| Hanako出席 | $a = (2, 1)$ | $c = (-1,-1)$ |
| Hanako欠席 | $c = (-1,-1)$ | $b = (1, 2)$ |



# MaxMin / MiniMax

[原問題] 最低の利得$\mathrm{Min}_q$ xを最大化する。

$\mathrm{Max}_p\mathrm{Min}_q$ x

[双対性] 最大の利得$\mathrm{Max}_p$ xを最小化する。

$\mathrm{Min}_q\mathrm{Max}_p$ x

Player A's strategy $p = (p_1, 1-p_1)$

Player B's strategy $q = (q_1, 1-q_1)$

$$x = 1 - 2\,p_1 - 2\,q_1 + 5\,p_1\,q_1$$

Max **Min x** with respect to p

→ $p^*_1 = 0.4$

Min **Max x** with respect with q

→ $q^*_1 = 0.4$

MaxMin ～ MiniMax

$$M = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$x = \{p, 1-p\}$$

$$y = \begin{pmatrix} q \\ 1-q \end{pmatrix}$$

$$x.M.y = 5\,p\,q - 2\,p - 2\,q + 1$$

$$\frac{\partial(5\,p\,q - 2\,p - 2\,q + 1)}{\partial q} = 0$$

$$\rightarrow 5\,p - 2 = 0 \rightarrow p = 0.4$$

$$\frac{\partial(5\,p\,q - 2\,p - 2\,q + 1)}{\partial p} = 0$$

$$\rightarrow 5\,q - 2 = 0 \rightarrow q = 0.4$$

# ナッシュ均衡とミニマックス均衡

- **ナッシュ均衡** →「均衡の定義」
  - 各プレイヤーの選択戦略によりいったん確定した関係から乖離しようとしても、離れようとしたプレイヤーが元の関係よりも不利になるならば、その関係は**ナッシュ均衡**である。
  - 囚人のディレンマの均衡はナッシュ均衡の定義を満たしている。**支配戦略均衡**は相手の戦略にかかわりなくはじめから確定している戦略で定まっている均衡のこと。
- **ミニマックス均衡**
  - 相手が利得最大を目指してくるのに対して相手の利得も最小化することである。このような戦略を**ミニマクス戦略**という。
  - **「双対戦略」はマキシミン戦略。自分の利得の最小限（最低保証額）を確保してから利得の最大化を計る戦略を**マキシミン戦略**という。**

# 華厳ゲーム

| | | B | |
|---|---|---|---|
| | 戦略 | 裏切り | 協調 |
| A | 裏切り | (0,0) | (1,0) |
| | 協調 | (0,1) | (1,1) |

- ナッシュ均衡が無限個存在する。
- 完全従属ゲームである。
  - ノイズは一斉に協調を導くが、TFT(Tit for Tat)戦略が必要。
  - とくに2期前の記憶付パブロフ戦略
  - Aruka, Y., “Avatamsaka Game Structure and Experiment on the Web,” in Aruka, Y. (ed), *Evolutionary Controversies in Economics*, Tokyo: Spinger, 2001, pp.115-132. Akiyama, E., and Aruka, Y., “Evolution of Reciprocal Cooperation in the Avatamsaka Game,” in Namatame, A., Kaizoji, T., and Aruka, Y. (eds.), *The Complex Networks of Economic Interactions: Essays in Agent-Based Economics and Econophysics*, Heidelberg: Springer Verlag, 2006, pp. 307-320.
  - **狂言「棒しばり」　と同じ設定**

    www.youtube.com/watch?v=S0altVe4Qls

# 相手と自分のアクションを覚えている メモリー２のケース

前期:
自分のアクションも相手のアクションも2種類、計4種類
今期:
[前期**C**のとき4種]{CD,DC,CC,DD}
×
[前期**D**のとき4種]{DC,CD,CC,DD}
→　16種類

**パブロフ戦略　PAVLOV's policy**
(Nowak 1993):

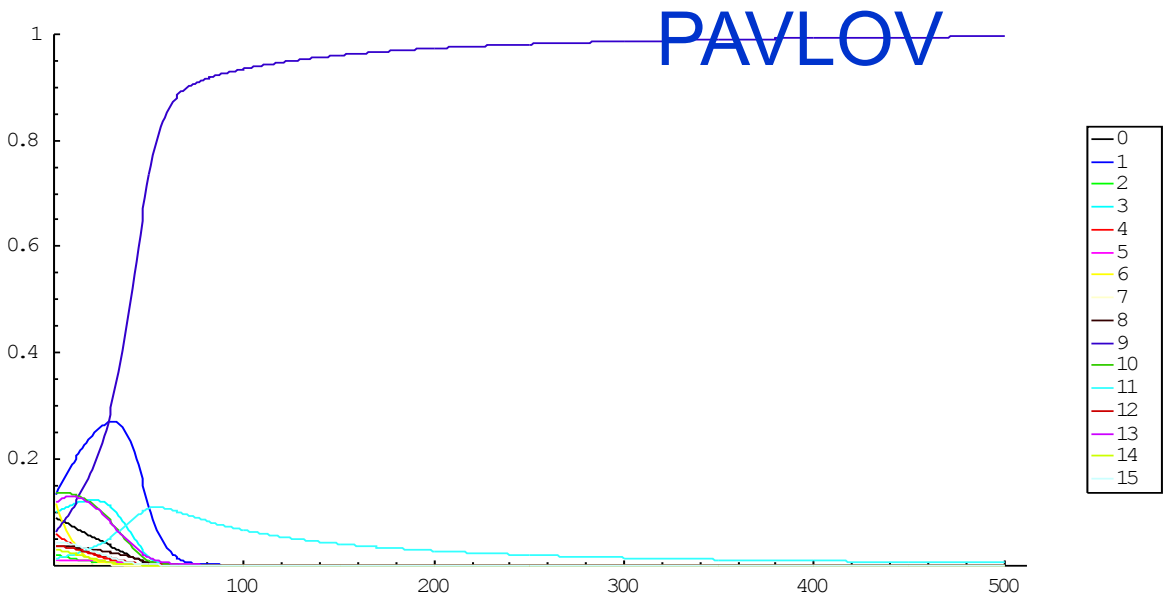
- 自分にとって快適なら、自分の戦略は変更しない。
- 自分にとって不快なら、自分の戦略を変更する。

■ パブロフ戦略

| **前期の戦略** / **相手** | **C** | **D** | **C** | **D** |
|---|---|---|---|---|
| 前期の戦略 / 自分 | C | C | D | D |
| 今期の戦略 / 自分 | C | D TFT | D | C ATFT |

# メモリー２のシミュレーション

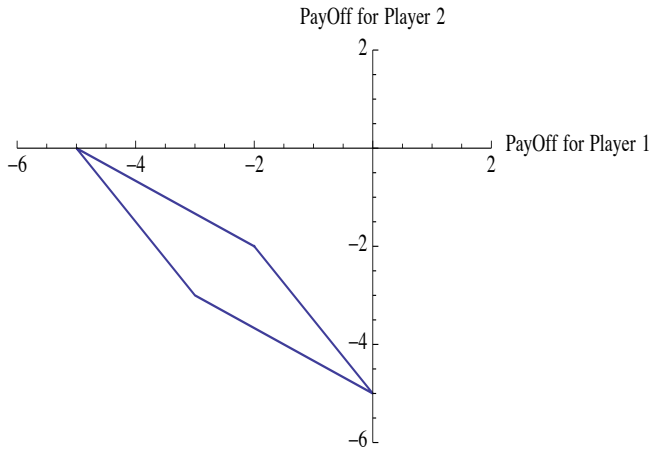
- パブロフ戦略は進化的に安定的である。
- 協調的社会が最終的に実現される。
- 初期条件に関係なく成立する。

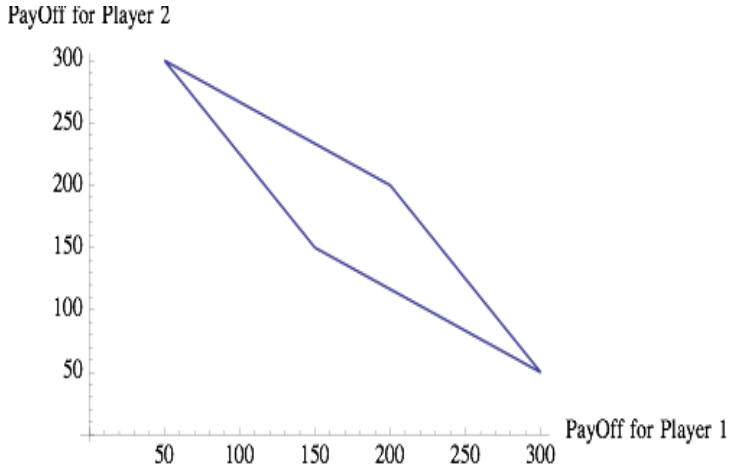


# 利得空間上の解集合

$$\begin{pmatrix}(-2,-2),(-5,0)\\(0,-5),(-3,-3)\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}(200,200),(50,300)\\(300,50),(150,150)\end{pmatrix}$$



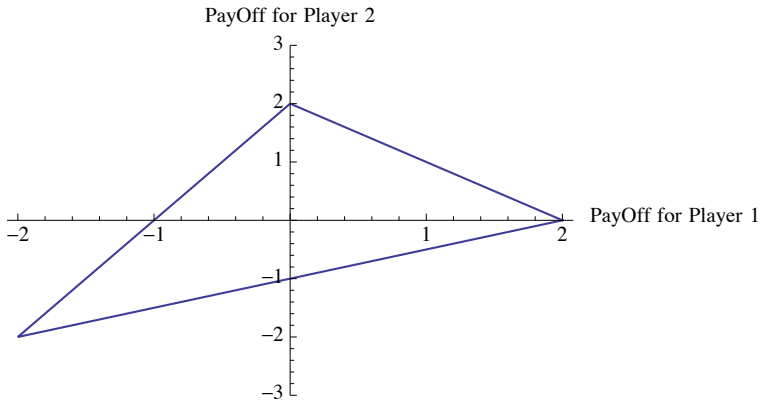



# タカ・ハトゲーム
# (チキン・ゲーム)

**タカ・ハト共存は可能か？**

$$\begin{pmatrix} (-2,-2),(2,0) \\ (0,2),(1,1) \end{pmatrix}$$

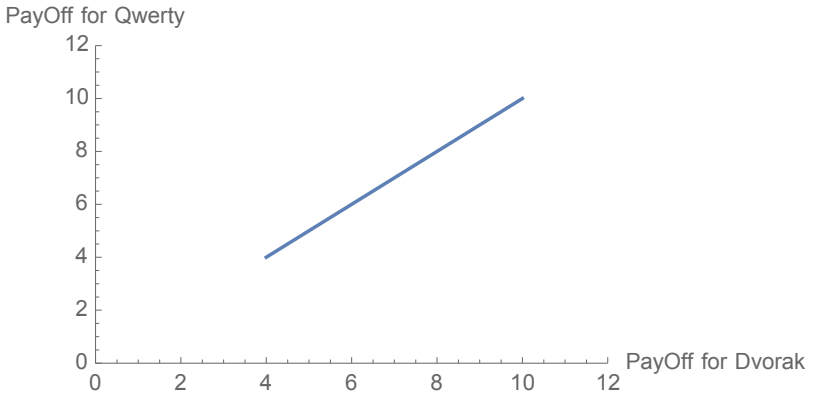
| | **タカ戦略** | **ハト戦略** |
|---|---|---|
| タカ戦略 | (–2, –2) | (2, 0) |
| ハト戦略 | (0, 2) | (1, 1) |



# 二つのナッシュ均衡

## coordination game

| | Dvorak | Qwerty |
|---|---|---|
| Dvorak | (10,10) | (4,4) |
| Qwerty | (4,4) | (6,6) |



# いじめspiteの例題

## 非対称な行動

| | クジα | クジβ |
|---|---|---|
| 自分の戦略1 | (200, 200) | (200, 200) |
| 自分の戦略2 | (201, 150) | (199, 50) |

- 「囚人のディレンマ」で相手に抜駆けされたときは、自分が損した金額の補償にこだわる。
- 一方、相手を蹴落とすことに特化する人間が存在するか？
- クジのどちらを好むか？あるいは、どちらがプレイヤーにとって面白いか？

# 経済学が顧みないディレンマ

- **ルソーの鹿狩りゲーム**
  - これは政治学者が昔から議論してきましたが、経済学者は知らん顔。しかし、最近、サンタフェ研究所のSamuel Bowlesが強調。
  - 鹿を追うときは二者は協力関係、しかし、鹿が見つかる前に、ウサギが現れた場合、ウサギは１人で追うことができる。

- **保証ゲームのディレンマ**
  - 作付けのディレンマ。Samuel Bowlesは幼少期をインドで過ごした。貧しい社会での作付けの期日をいつにするかのディレンマ。

# 共有地の悲劇

## 囚人のディレンマｎ人ｎ戦略バージョン

- 村に皆が牛を放牧ですることができる**共有地commons**がある。
- 牛を放牧する農家の数が少ない初期状態で、放牧農家の収益は、飼育する牛の数を増やすとき、収益は確実に増加する。
- この高収益が誘因となって、他の農家も参入し、放牧される牛の全体数が増加する。
- 放牧牛の全体数が増加すれば、牛が一頭あたり食べることのできる草の量が減少、結局、共有地全体の環境が悪化する
- 最終的に、農家世帯あたりの収益は、牛の数を増やしたとしても、当初の高収益を確保できないばかりでなく、共有地の草が食つくされて放牧牛全体が死滅する脅威にさらされる。

鈴木光男(1994)『新ゲーム理論』勁草書房

Hardin、 G。 R。(1968)、 “The Tragedy of the Commons”、 Science、 162、 1243-1248

# 「共有地の悲劇」の利得変化

- 農家の戸数を4戸とする。
- 各農家$i$の収益は他の農家が飼育する放牧数の総数に依存する。たとえば、次式の関係が成り立つとする。このとき、共有地の悲劇のディレンマが発生している。

$$x_i = q_i\{16 - (q_1 + q_2 + q_3 + q_4)\} - 2q_i$$
$$= q_1(16 - q_1 - 2q_1) - q_1 q_2 - q_1 q_3 - q_1 q_4$$

$q_1$にかんして2乗項　$-q_1q_j$は$q_j$とともに急増

ゆえに$q_j$の増加とともに収益は$x_i$急減

| 農家i以外の農家による放牧牛の総数 | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 牛数 | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
| 戦略1 | 13 | 12 | 11 | 10 | 9 | 8 | 7 | 6 | 5 | 4 |
| 戦略2 | 24 | 22 | 20 | 18 | 16 | 14 | 12 | 10 | 8 | 6 |
| 戦略3 | 33 | 30 | 27 | 24 | 21 | 18 | 15 | 12 | 9 | 6 |

# ディレンマ発生の実装構造

各農家の収益は、その他の農家のとる戦略がいかなる場合でも、私利の観点から、牛の数を最大限3頭まで増やすことが得策である。

牛の数2（戦略2）は牛の数1（戦略1）を強支配strictly dominate している。

牛の数3（戦略3）は牛の数1（戦略1）を強支配strictly dominate している。

牛の数3（戦略3）は牛の数2（戦略2）を弱支配weakly dominate している。

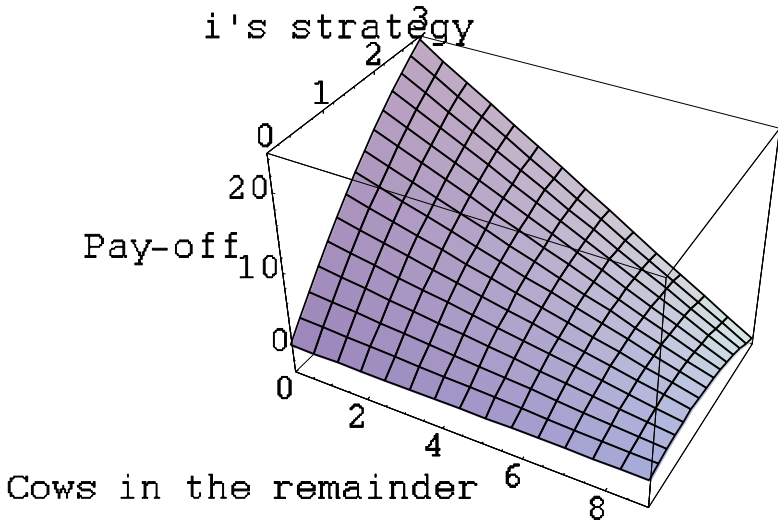
したがって、共有地の悲劇の設定では、利己的動機が優先されるかぎり、避けることができない。

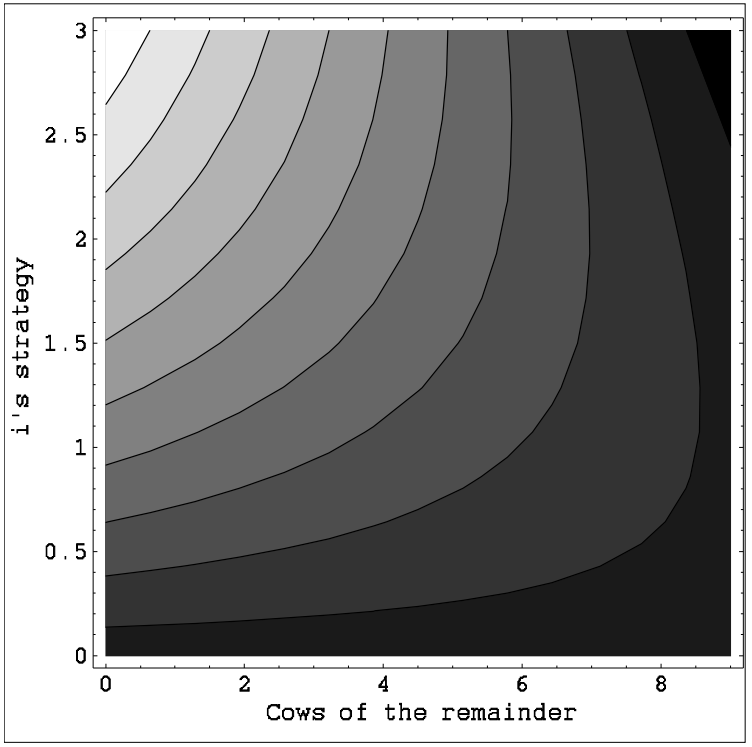
上記方程式

$$x_i = q_1(16 - q_1 - 2q_1) - q_1 q_2 - q_1 q_3 - q_1 q_4$$

は、自乗項$q_i^2$と相互作用項$q_i q_j$の項を含む**非線形方程式**であるので、$x_i$の値は単調に変化しない。これはいわゆるリプリケータダイナミクスである。

# 利得の等高線図


i's strategy
3
2
1
0
20
Pay-off
10
0
0
2
4
6
8
Cows in the remainder


3
2.5
2
1.5
1
0.5
0
i's strategy
0
2
4
6
8
Cows of the remainder

# 捕食者-被食者システム

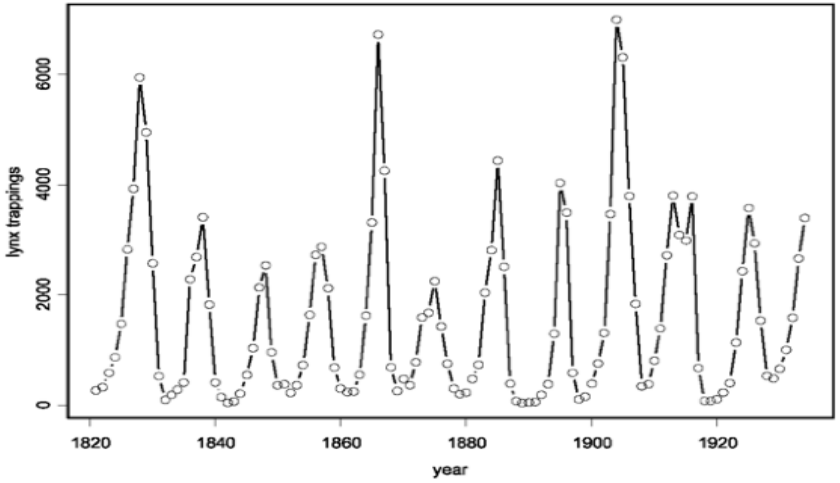
- オオヤマネコlynxsの増殖率（出生率）をb，死亡率をdとして時間 t を通じて一定とする。このとき、オオヤマネコの群れの変動を次式で記述する。
  - X(t+1)＝X(t)－d X(t)＋bX(t)
- これだけでは線形システムを表すにすぎない。非線形現象をつくるために捕食者と被食者の相互作用の項を導入する。
- オオヤマネコが野うさぎを捕食する効率cを2回の遭遇につき1回とすると、c=0.5である。cも時間を通じて一定とする。このとき、オオヤマネコが野うさぎを捕食する平均回数は**cXY**である。つまり、捕食者と被食者の相互作用は非線形項として表示される。こうしてオオヤマネコの群れにかんする非線形差分方程式を得る。
  - X(t+1)＝X(t)－d X(t)＋bX(t) +cX(t)Y(t)
- 同様にして、野うさぎの群れについても非線形差分方程式を得る。ここで、δ，βはそれぞれ野うさぎの出生率，死亡率である
  - Y(t+1)＝Y(t)－δY(t)＋βY(t) －cX(t)Y(t)

# 実際の例題

## リプリケータダイナミクス

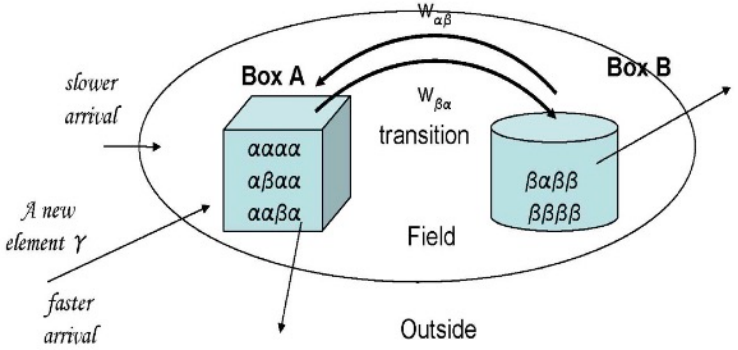
- いま定義した捕食者-被食者システム {X(t), Y(t)}は、実際、ハドソン湾会社の記録のとおり、解析上、オオヤマネコと野うさぎの循環的変動を生み出すのである。つまり、非線形現象はそのまま動力学的な時間発展の経路を生み出す。
- 捕食者-被食者モデルは別名，二人の発見者の名前にちなんでロトカ-ヴォルテラ方程式とも呼ばれる。また，生物学，経済学で進化ゲームを記述する基礎モデルとして用いるとき、リプリケータダイナミクスと呼ばれる。

**カナダ北西部マッケンジー川流域のオオヤマネコ捕獲**



# 状態遷移：異質性と相互作用

- 状態A：要素xと要素yがボックスAに入っている。
- 状態B：要素xと要素yがボックスBに入っている。
- ボックスAとボックスBの要素x,yは移動可能である。
- どちらのボックスでもx比率=0.5,y比率=0.5のとき、ボックスは区別できなくなる。⇒エントロピー（複雑さ、混雑）最大化
- 経済エージェントはどのボックスに入るのか、あるいは出ようとするのか⇒経済移民immigration or　emigration



# 好みは変遷する

ヒューマンエージェントの好み

経済エージェントの満足　予算制約

ボックスへのinflow and/or outflowを考察するとき、経済エージェントの好みは、予算制約ばかりでなく、他のエージェントの好みに影響される

- 好みは変遷する。
- 学習効果がある。

確率選好ばかりでなく、逐次選好についても考慮する必要がある。これは多項ロジットモデルで説明・検証することができる。

- 離散選好理論およびlogit model　[後述]
- すでにマーケティング消費者行動論でも応用されている。
- 交通工学でも利用

# 投票のパラドックスと社会的決定

個人主義と社会的決定

# 民主主義と可能性定理

**アローArrow, K. J.(1921-)** という経済学者は1972 年にノーベル経済学賞を受賞した今世紀最大の経済学者の一人。

この定理は「**適当な民主主義的条件のもとで独裁者が誕生する！**」というもので、定理の脈絡から別名「**不可能性定理**」とも呼ばれます。

Arrow,K.J.,*Social Choice and Individual Values*, 2nd.ed.,New York:John Wiley, 1963. Firstly published in 1951. アロー著・長名寛明訳『社会的選択と個人的評価』日本経済新聞社、1977 年

「高校生にもわかる証明」佐伯胖(1980)『「決め方」の論理ー社会的決定論への招待ー』東京大学出版会

実は「アローの定理」は1785 年にコンドルセーCondorce, N. J. が発見した「投票のパラドックス」から着想。

**アローの可能性定理：** 専門的には**社会的選択ルール**が整合的でないことを示したもの。

**社会的選択ルール：** 個々人の選好順序のリストを倫理的な社会的選好順序に移す関数のこと。

**投票のパラドックス**は個人の選好順序が社会的に集計されるとき生じる矛盾について言及したもの。

# 投票のルールと不満の衡平

投票による可否は不満の**衡平**から評価できる。

- 過半数ルール

  51の不満が49を抑えることができる。

  2004年米国大統領選挙の例

- 2/3ルール

  34の不満が66を抑えることができる。異議の力は相手の2倍に評価されている。 全員一致ルールに近い。

**ボルダルール**

個人の選好の第一順位を最高点、第二順位を次点で評価する。以下同様。

たとえば、三選択肢x,y,zで$x \succsim y \succsim z$

なら、xは2点、yは1点、zは0点と評価する。この評価はすべての個人で同様とする。

このとき、全個人の得点合計で最高得点を得た選択肢を社会的第一順位とする。

**ボルダルールでは投票のパラドックスは生まれない。**

# 選好関係

- **選好：**選好は*preferecne* からの訳語。紺色x と朱色yの2色から太郎が紺色を好み花子が朱色を好むという意味。

- **選好の順序：**選好の対象になる任意の2つx とy についてつねに順序づけ*ordering*を行なうことができると考える。
  - 太郎はx をy よりも好む。これを**x≻y** と書く。
  - 太郎はy をx よりも好む。これを**x≺y** と書く。
  - 太郎はx とy は同程度に好む（太郎にとってx とy は無差別*indifferent* である）． これを**x ∼ y** と書く。

- x項とy項の2項を選んでその都度選好の順序を決めるという意味で，「**2項選好関係**」の世界の順序。
  - 紺色x，朱色y，黄色z の3個から1個を選べというとき，3項に厳密な順序をつけずにy を選ぶという選好関係はさしあたり考慮しない。

# 選好記号の注意

- 選好記号
  - $\succsim$ **: either** $\succ$ **or** $\sim$
  - $\precsim$ **: either** $\prec$ **or** $\sim$
  - $\sim$**:　indifferent**
- **either... or...** 数学記号では$\cup$ （和集合）
  - x $\cup$ y：　「xおよびy」、または、「x あるいはy のどちらか」
  - and/or: 「および/または」と訳す。
- **x** $\succsim$ **y：**
  - 太郎は少なくともy よりx を好む。
  - y はx よりも良いとはいえない。

# 2項選好関係

下記3条件を満たす。

- **反射性reflexivity**
  - 花子はx よりx を好まないことはない。$x \succsim x$.
  - 実数を例にとれば、$2 > 2$ ということはない。よって、$2 \geq 2$は自明。これを選好関係に拡張したもの。

- **完備性completeness**
  - 花子はy を少なくともx より好む。$y \succsim x$
  - 花子は少なくともy よりx を好む。$x \succsim y$
  - 花子はx とy について無差別である。$x \sim y$
    - 選好は上記３種類しかないこと。ピカソとアインシュタインは「比較不可能であるという判断」は除外していること。また天気などで選好が変化するという事態も考えていない。

- **推移性transivity**
  - $x \succsim y$ かつ$y \succsim z$ であるならば、$x \succsim z$。
  - **循環順序**$x \succsim y \succsim z \succsim x$ が生じないことを要請する。

# 投票のパラドックスの例題

- 米国上院で実際にあった選択肢 **(1955)**：

- 国道建設労働者の賃金を**DB挿入句**は特定の規準で国が査定するという条項。
  - x : DB挿入句付きの国道建設事業原案
  - y : DB挿入句の削除案
  - z : 国道建設廃棄案

| 議案の順位 | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|
| 北部民主党 | x | y | z |
| 南部民主党 | y | z | x |
| 共和党 | z | x | y |

- 各政党の選好順序
  - 北部民主党：x >y >z
  - 南部民主党：y> z >x
  - 共和党：z >x >y

# 社会決定の循環順序と経路依存性

**循環順序**

- $\succsim_S$：S は社会的選好を意味する。
  - x 対y：2対1で$x \succsim_S y$
  - y 対z：2対1で$y \succsim_S z$
  - z 対x：2対1で$z \succsim_S x$
- $x \succsim_S y$, $y \succsim_S z$ に推移性を適用すると、
  - $x \succsim_S z$
  - **推移性で得られる結果$x \succsim_S z$ と実際に得られる結果$z \succsim_S x$** が矛盾している。

**経路依存性**

- 当時、民主党党首はリンドン・ジョンソンで上院は民主党が多数派。
- ジョンソンは原案x にたいして迂回的に修正案y を票決するように仕向ける。
- 南部民主党と共和党は原案x に反対なので、まず原案x と廃棄案z を評決して廃棄案z が勝。
- そこで、修正案y は廃棄案z と票決されるが、今度は南北民主党の反対で、廃棄案z は負ける。
- その結果、修正案y の採択が成功する。

# 循環順序の消滅

循環順序発生の可能性は3選択肢で約5パーセント程度。

次郎の選好変更により循環順序は消滅する。

| 選択の順位 | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|
| 花子 | x | y | z |
| 太郎 | y | z | x |
| 次郎 | z | x | y |

z> x>y　→　z > y >x

次郎のこのような変更により，次郎はアルバイトが駄目なら，授業出席よりもサークルの会議を次善の策と考える。

| 選択の順位 | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|
| 花子 | x | y | z |
| 太郎 | y | z | x |
| 次郎 | z | **y** | **x** |

# パラドックスのない状態の検証

各人がx，y，z からの選択により得ることができる**満足**を数値表現numerical presentation できるとする。太郎の満足を記号$u^{太郎}$ で表示する。

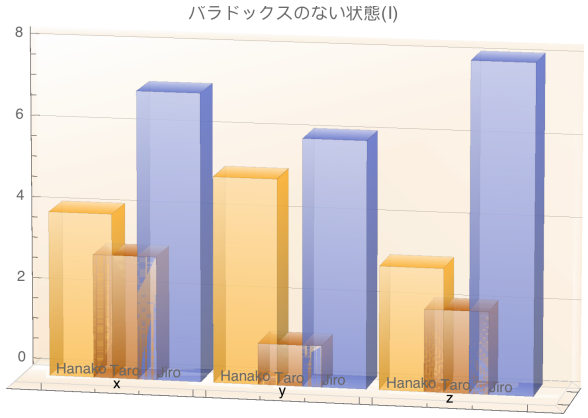
u ：いわゆる「甘さ」の濃度を思い浮かべればよい。

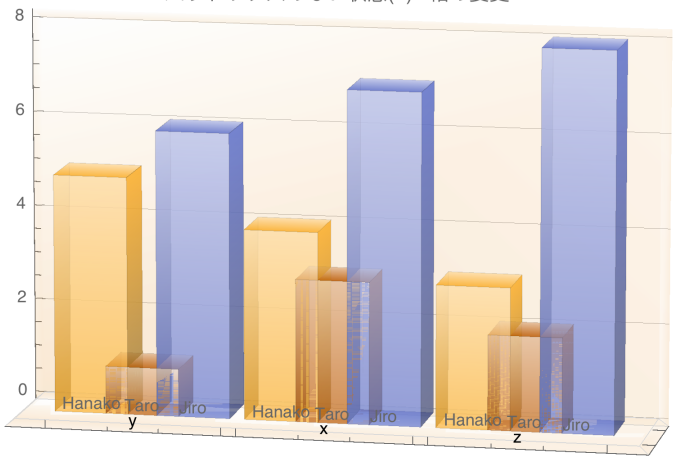
横軸： x，y，z の順で目盛り

縦軸： u

**単峰性の仮定**

パラドックスのない状態は、適当にx、y、zの順序を入れ替えて峰が**ひとつ**だけにできるような選好分布が得られていることである。



# 集合的選択規則の諸条件

**条件U**（定義域の無制約性）

規則***f***の定義域**X**上で個人iはどんな順序付け（選好）をしてもよい。

**条件D**（非独裁制）

規則***f***の定義域**X**上の任意のx, yにかんして、

$x \succ_i y \rightarrow x \succ y$および$y \succ_i x \rightarrow y \succ x$　とすることができる個人i（独裁者）は存在しない。

**条件P**（パレート原理あるいは全員一致ルール）

ある任意の選択肢( x , y )にたいして、すべての個人iについて$x \succsim_i y$ならば，社会的選好を $x \succsim y$ とする。

**条件I**（情報効率性）

無関係な対象からの社会順序の独立性。たとえば社会順序 x R z はx とyを入れ替えても変化しない。

$R_\alpha = x>y>z$；$R_\beta = y>x>z$　$\rightarrow R = x \succ z$

$R'_\alpha = y>x>z$ ；$R'_\beta = x>y>z$　$\rightarrow R' = x \succ z$

# アロー可能性定理

$R_i$: 各個人iは順序付け$R_i$を有する。

$\{R_1, \ldots, R_n\}$: N人がそれぞれ個々につける順序の組

***R***:　社会的結論

集計：

定義域$\{R_1, \ldots, R_n\}$ --- ***f*--- >** 値域**R**

***f*: 集合的選択規則**

集合的選択規則***f***が生み出す結果（社会の選好）が反射性、完備性、推移性を満たすとする。

このとき、**条件U**（定義域の無制約性）、**条件D**（非独裁性）、**条件P**（パレート原理）、**条件I**（情報効率性）を満たす**集合的選択規則*f***は存在しない。

# アロー可能性定理の発生例題

| ボルダ得点 | 3 | 2 | 1 | 0 |
|---|---|---|---|---|
| 太郎 | x | ≻ y | ≻ z | ≻ w |
| 花子 | y | ≻ z | ≻ w | ≻ x |
| 次郎 | z | ≻ x | ≻ w | ≻ y |

**2組ずつ単純多数決**

x vs. y: 2対1

y vs. z: 2対1

z vs. x: 2対1

社会的決定は

**x ≻ y ≻ z**

ところがx ≻ zを支持している者は太郎1人だけ。

**ボルダルールの決定**

**z≻ x~ y**

左表では、xもyも一番嫌っている人がいる。ところが、多数決だと議決の順序によって、xもyも勝つ可能性がある。ボルダルールではこういった可能性は発生しない。

# ボルダルールと偽りの申告

| ボルダ得点 | 3 | 2 | 1 | 0 |
|---|---|---|---|---|
| 太郎 | x | ≻ y | ≻ z | ≻ w |
| 花子 | y | ≻ z | ≻ w | ≻ x |
| 次郎 | z | ≻ y | ≻ w | ≻ x |

2組ずつ単純多数決

x vs. y: 1対2

y vs. z: 2対1

z vs. x: 2対1

y ≻ z ≻ x ≻ y

ボルダルール

x: 3点→ 5

y: 7点 → 5

z: 6点 → WINNER

w: 2点

# 効用関数と無差別曲線

## 教科書第2章

お伽話の等高線、効用関数、無差別曲線、限界代替率逓減、予算線

# 選好の性質の2次元への拡張

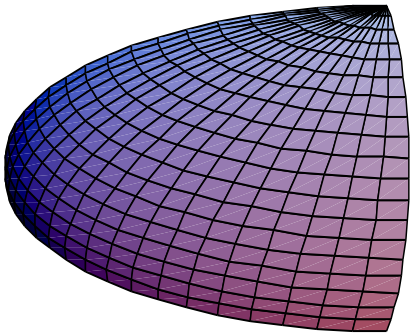
- **反射性**　reflexiblity
- **完備性**　completeness
- **推移性**　transitivity
- **連続性**　continuity
- **単調性**　monotonity
- **凸性**　convexity

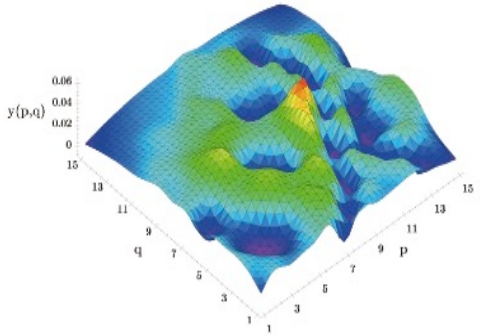
無差別曲線indifference curveとは地図で言えば「等高線」のこと。等高線は山あり谷ありの起伏のある「現実の地形」を表すのにたいして、無差別曲線は「お伽の国の地形」を表す。お菓子の国ならお菓子の材料で作られる。

「新古典派経済学の**お伽の国**」は以上6つの材料で作られる。

- 以上6つが無差別曲線をつくる材料である。

# お伽の国





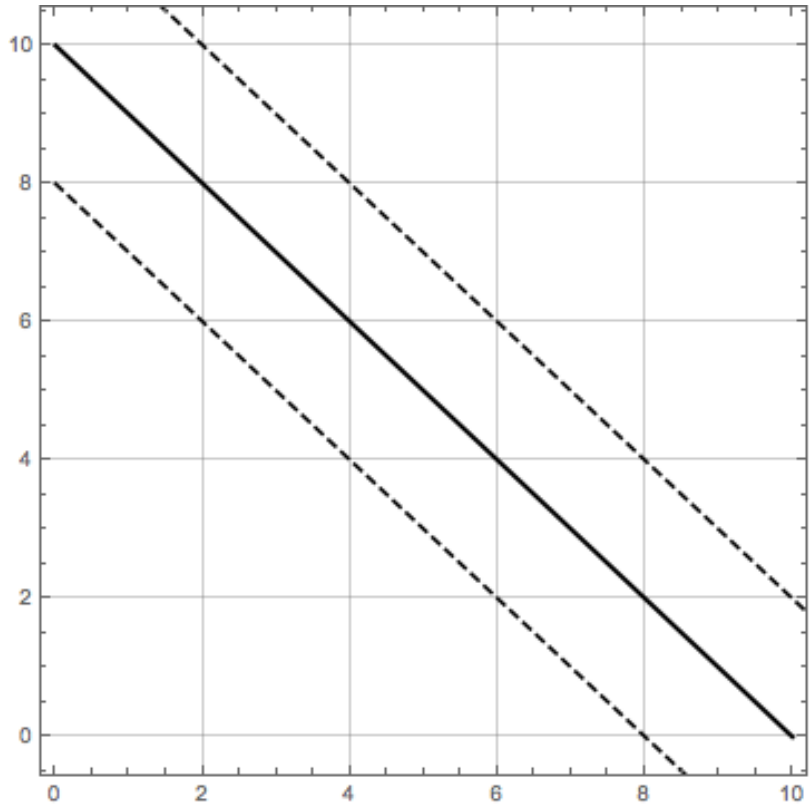

われわれはこれから

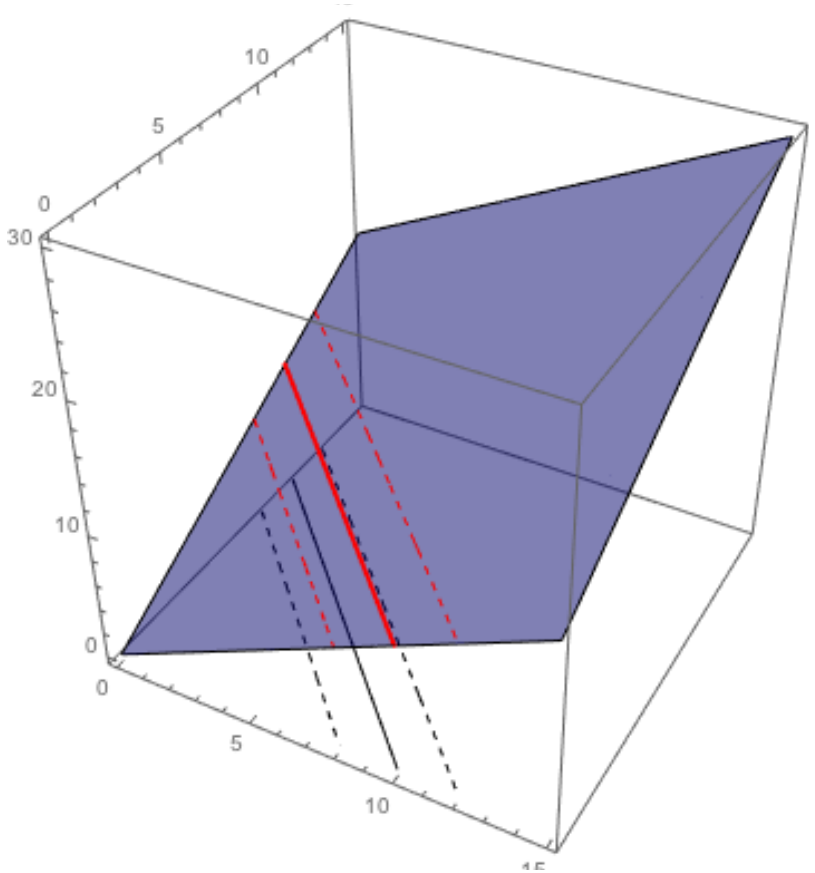
⇐　不思議な半球状の世界

に閉じ込められることになる。ちょうど「不思議の国のアリス」のような立場で考えることを求められる。これが新古典派ミクロ経済学の要求である。

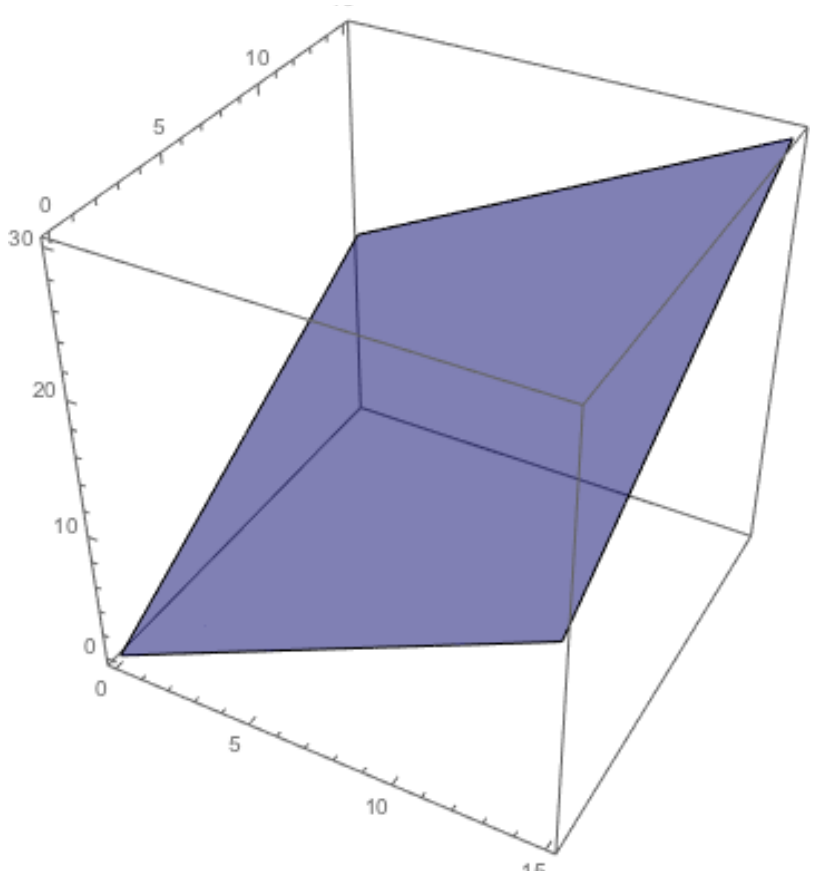
- 現実の地形は山あり谷ありである。

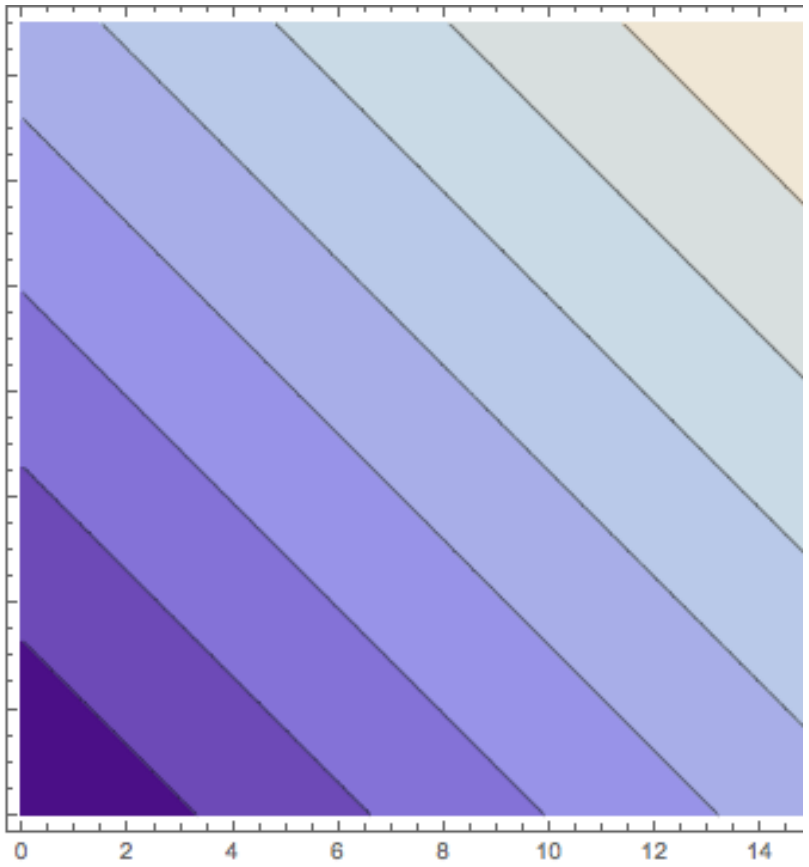
# 2次元座標系



# 等高線



# アルコール中毒者の反応

- 豆腐$x_1$と日本酒$x_2$のバスケット
  - 比較するための**基準バスケット**$(x^*_1,x^*_2)=(2,2)$

- $\mathbf{x}^v=(3, \mathbf{x}^v_2)<(2, \mathbf{2})$
  - $\mathbf{x}^v_2 \to 2$、つまり、 {1.9, 1.99, 1.999, <……<2}
  - 日本酒が僅かでも多いバスケットを選好する。

- $\mathbf{x}^v_2=\mathbf{2}$のとき、**選好の逆転**が発生する。
  - $\mathbf{x}^v=(3, \mathbf{2}) \gtrsim (2, \mathbf{2})$
  - 日本酒の量は同一になるので、豆腐の量の大小のみが判別基準になる。

# 不連続な選好関係

アルコールの量を$a$とし他の消費財を$c$=2とする。

- $a$が$c$=2より大きいなら明らかに( 2,2+ $\Delta$) ≻ (2,2) 。
- よって、 $a$が$c$=2以下を考察する。

消費財バスケット($c$, $a$)がつぎの４つあるとする。

($c$+$\Delta$, $a$ −2$\Delta$), ($c$ , $a$−$\Delta$), ($c$ , $a$), ($c$ +$\Delta$, $a$)

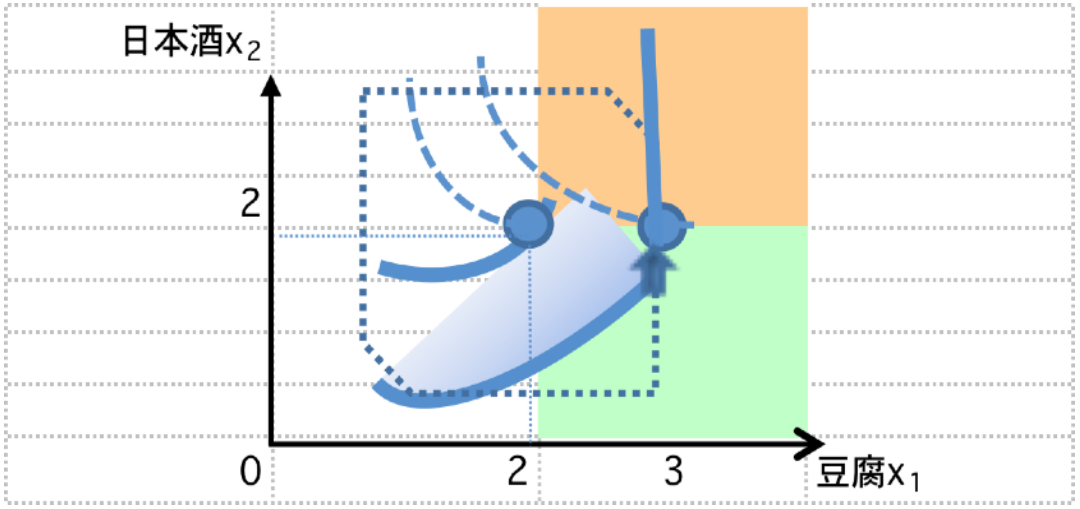
- ここで$\Delta$=0.0001（微小変化）とし、2$\Delta$=0.0002とする。

「アルコール中毒者」の選好は以下のようになる。

- ($c$+$\Delta$, $a$ −2$\Delta$), ($c$ , $a$−$\Delta$), ($c$ , $a$)の比較は、$c$の量にかかわりなくアルコールの量$a$だけで決定される。
- ($c$ , $a$), ($c$ +$\Delta$, $a$)の比較は、アルコールの量$a$が同じなので、 $c$の量によって決定される。

# 選好の不連続性のイメージ

- 基準点(2,2)から見たワンショットのイメージ。
- 不連続がどこでも埋め込まれているので、基準点ごとにイメージも変わる。



# 最良の集合の存在

**推移性：**

$x \gtrsim z$ かつ $z \gtrsim y \quad \rightarrow \quad x \gtrsim z \gtrsim y$

**バスケットyより選好されないことはない集合：**

- $b \gtrsim y$を満たす集合{x,z}
- $b \gtrsim z$を満たす集合{x}
- xはyにたいして最良の集合
- 共通集合は非空： $\{x\} \cap \{x,z\} \neq \phi$

**連続性および閉性：**

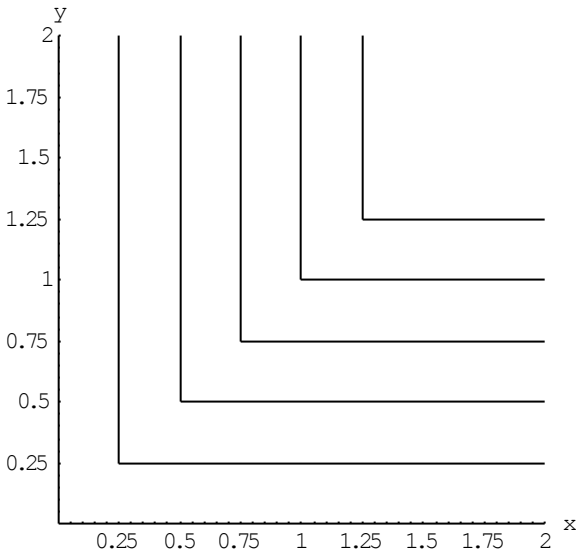
- $z \gtrsim y$の近傍でも同じ選好が成り立つ。$z^v \gtrsim y^v$
- $x \gtrsim z$の近傍でも同じ選好が成り立つ。 $x^v \gtrsim z^v$
- yにたいして微小変動させても $x^v$ は$y^v$にたいして最良の集合

以上の諸条件で、かならず**最良の集合**が存在する。

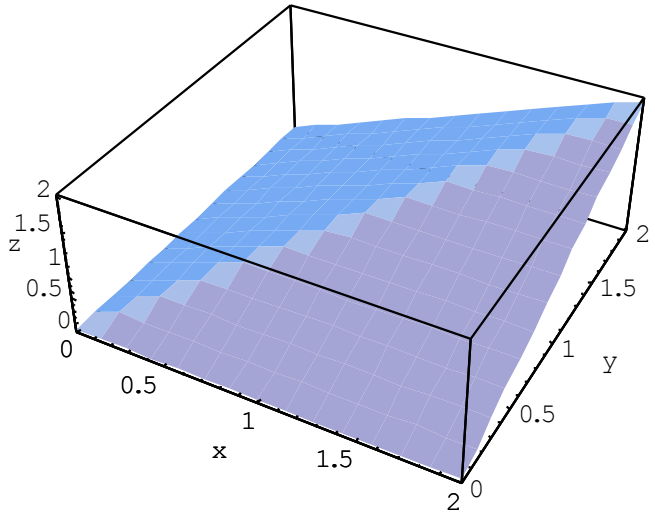
# 単調性：大きいことは良いことだ！

**u = min(x, y)**の無差別曲線

L字型曲線

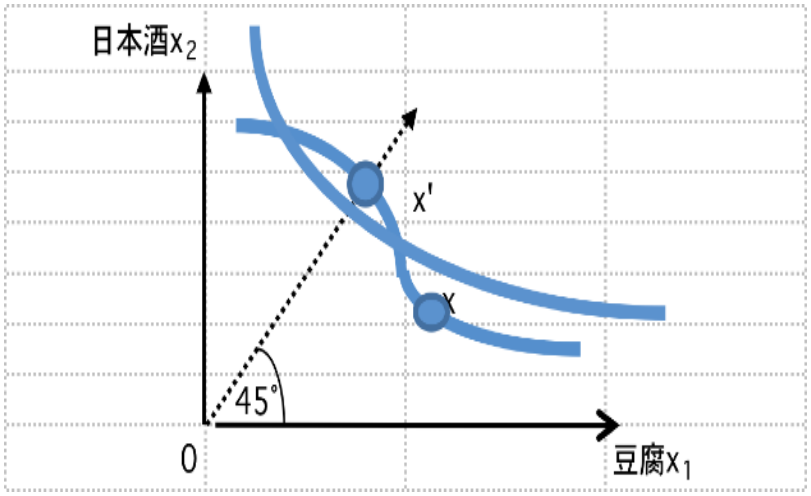



**北東方向**：少なくともxかyかのどちらかは**増える！**



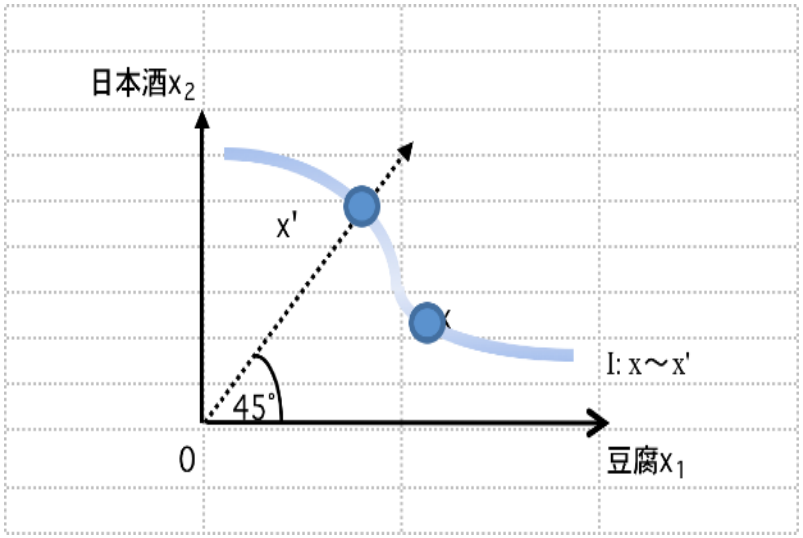
# 単調性が崩れると・・・

単調性が崩れると推移性が成り立たない。



# 効用関数の存在(図2.7)

- **45度線**は横軸の任意の値$x_1$をそのまま縦軸に写し撮る関係を与える。横軸$x_1$の値が1ならば縦軸$x_2$も1である。
- 45度線の点( $x_1$, $x_2$)上で　$x_1=x_2=\gamma$
- よって、γを用いて　$x=\gamma \cdot (1, 1)$
- バスケットx'： バスケットx= ( $x_1$, $x_2$) と無差別な選好関係にある45度線上のバスケット。



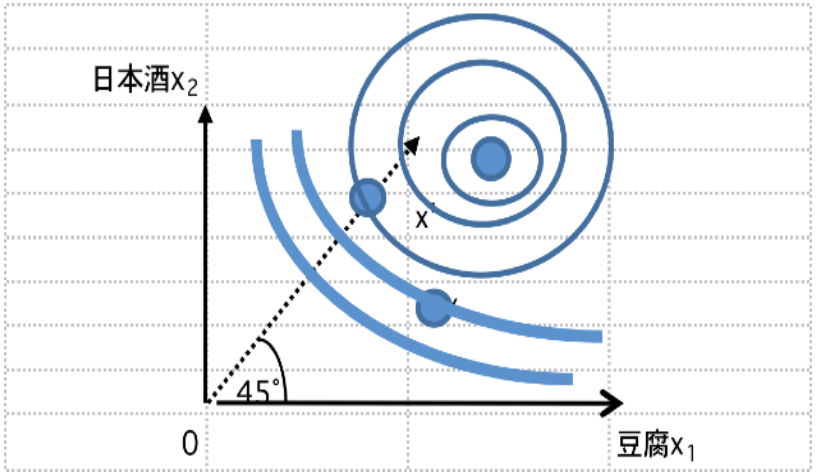

ゆえに,

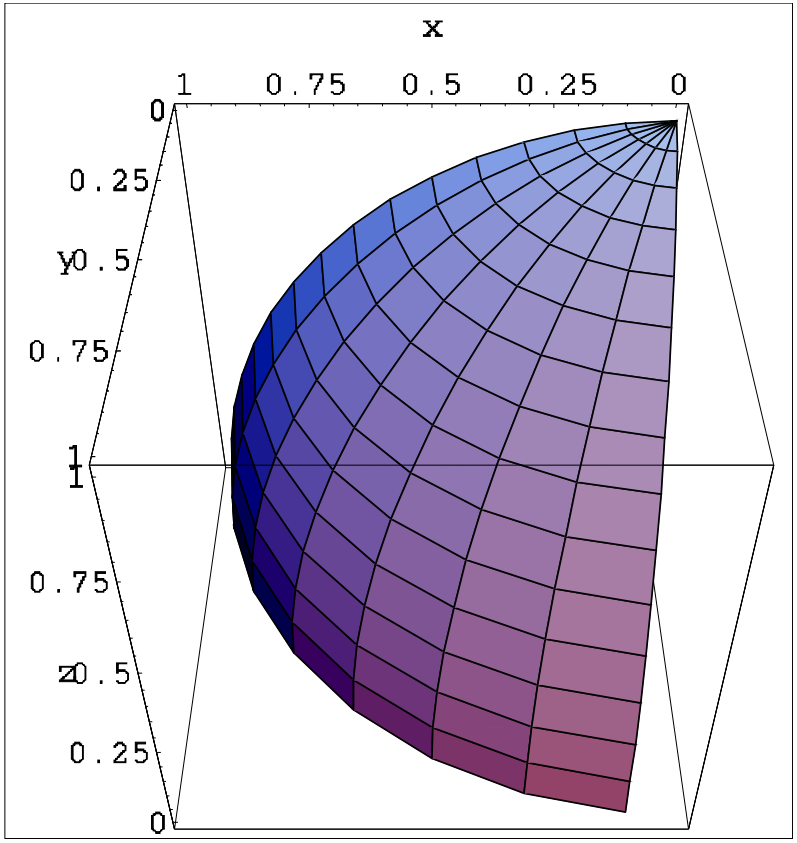
$\gamma=u(x')=u(x)$

$x \sim u(x) \cdot (1,1)$

# 効用関数の測定

**飽和点のあるケース**



# 強凸選好

## strict convex preference

**均等分布選好の原理(53頁)**

**経済学の本$x_1$と漫画の本$x_2$のバスケット： $x= (x_1, x_2)$**

- **$x^A$**=(2,5)と**$x^B$**=(4,3)は選好において同値であるとする： **$x^A \sim x^B$**

- $x^A$と$x^B$を混合（平均）したバスケット：

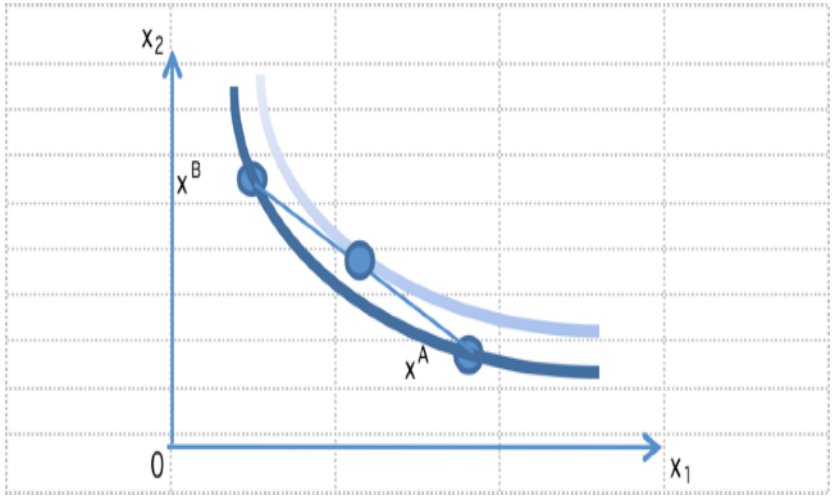
$$x^C \rightarrow (x^A+x^B)/2=0.5\ x^A+0.5\ x^B =(3,4)=x^C$$

**$(x^A+x^B)/2 \succ x^A \sim x^B$**

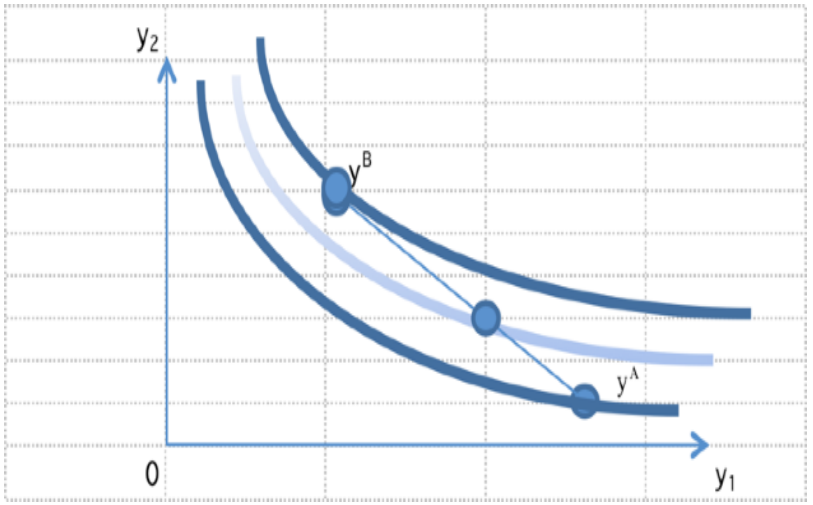
- 混合（平均）したバスケットは元のバスケットよりも選好される。これはバスケットの中身はできるだけ均等になっていることが望ましいという判断に基づいてる。

# 強凸選好と弱凸選好

強凸選好




弱凸選好

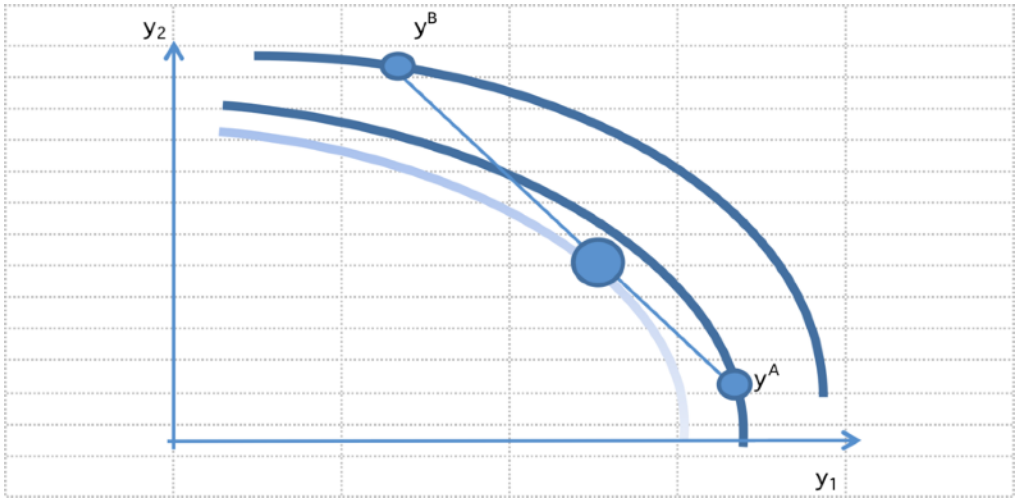


# 準凹関数の効用関数

パネル上段

弱凸選好を満たさない効用関数に基づく無差別曲線群

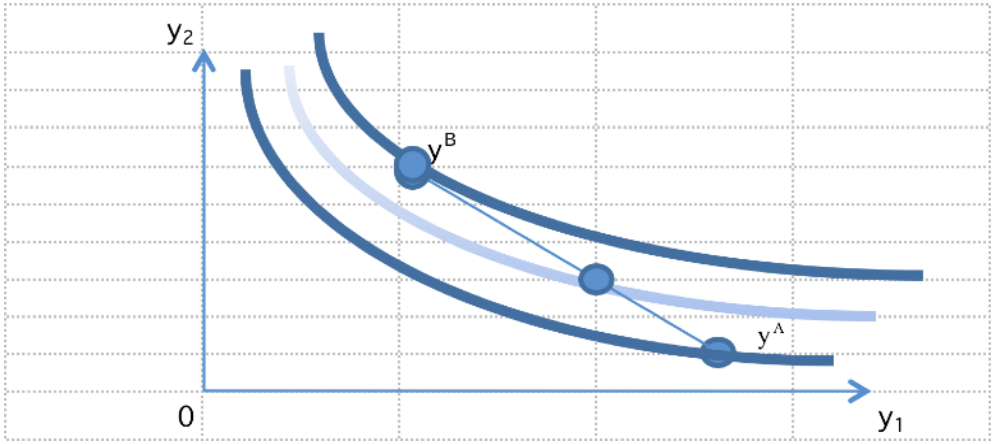
(準凹関数ではないケース)




パネル下段

弱凸選好を満たす効用関数

(準凹関数のケース)



# ワイン例題の反例

ワインのように各財ごと「**均等分布選好の原理**」は適切な解釈を与えない。

- 赤ワインBeaujolais $\mathbf{y_1}$と白ワインBordeaux $\mathbf{y_2}$のバスケット：　$y=(y_1, y_2)$
  - $y^A=(6,1)$と$y^B=(2,5)$
- $y^A$と$y^B$を混合（平均）したバスケット：
- $y^C$　→　$(y^A+y^B)/2=0.5\ y^A+0.5\ y^B=(4,3)=x^C$
- **均等分布選好原理**では、
  - 強選好　$(y^A+y^B)/2 \succ y^A \sim y^B$
  - 弱選好　$y^B \succ (y^A+y^B)/2 \succ y^A$

**均等分布選好原理の生き残り策：**

- 三四郎が１週間ごとにワイン購入計画を立てるとき，今週の献立を考えながら，赤と白のワインの本数を均等分布にするようなバスケットを選好する。

# 無差別曲線の問題点

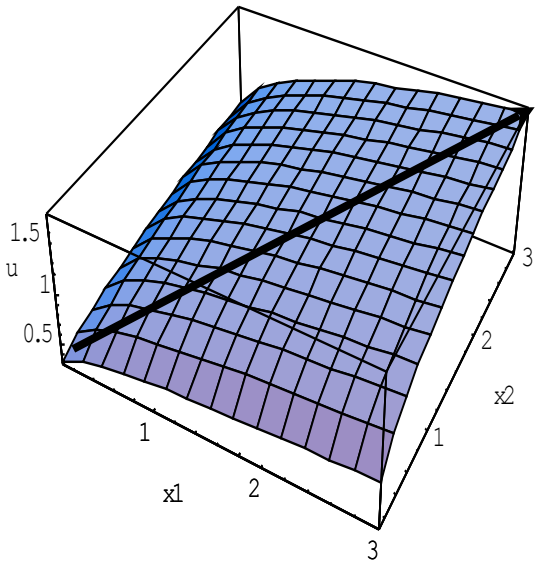
- これまでの効用関数の議論では、りんごとみかんの限界代替率を心理的に表現できると考えている。しかし、「**選択的に同値な財バスケット**」とは一体何なのか？

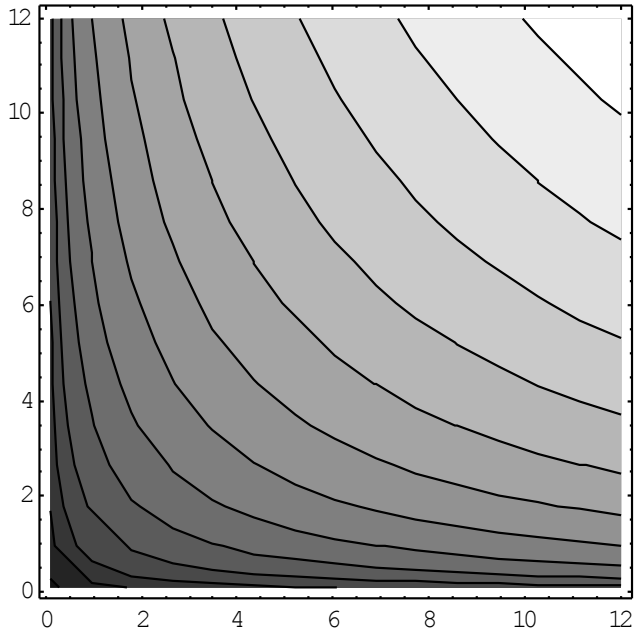
- 「りんごの多く入ったバスケット」と「みかんの多く入ったバスケット」の比較では、**りんごの好きな人にしてみれば、明らかに「りんごの多く入ったバスケット」の方がよろしい。**無差別曲線の議論は、**財の選択を微小単位の世界に追い込み**、その結果、りんごの好きな人は「りんごの多く入ったバスケット」の方がよいという選好を排除している。

  - 微小単位選択の無差別曲線型の効用関数から離れないと、現実的な選択理論にはなりえないであろう。

# 効用関数と需要関数

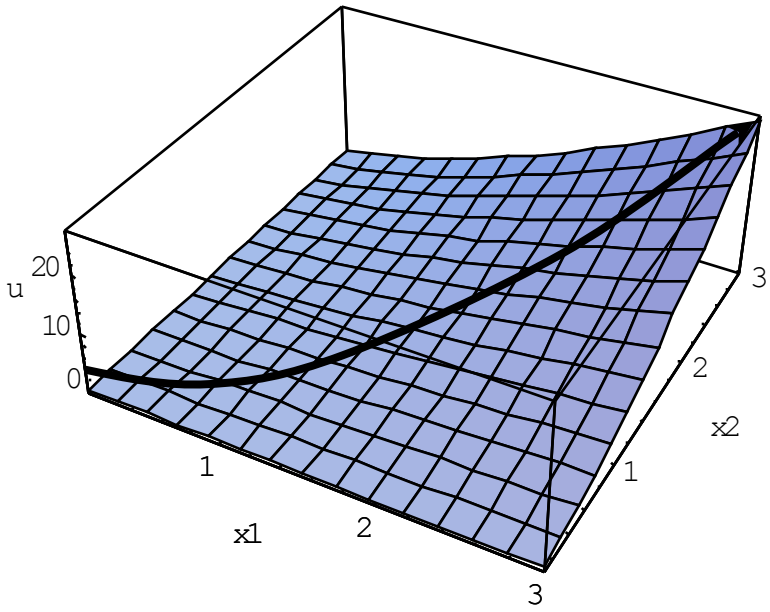
# 効用関数$z=x^{0.5}y^{0.5}$の形状(1)

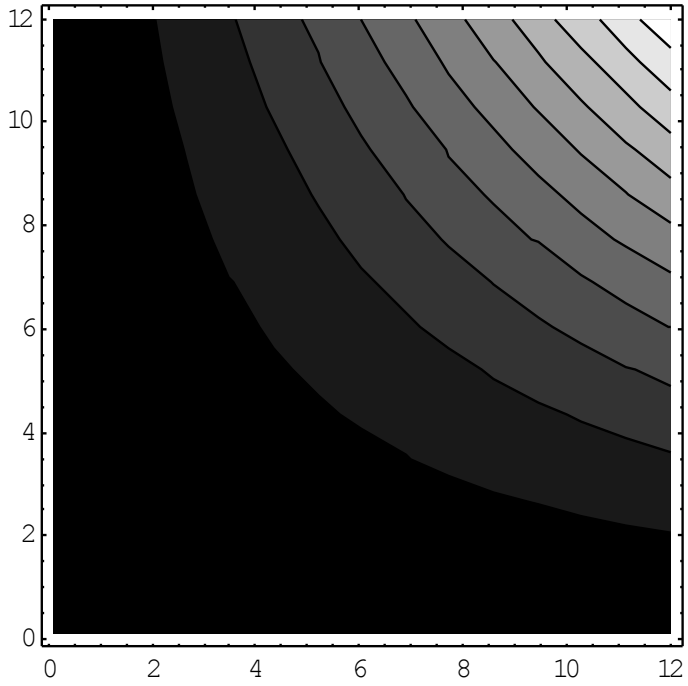


# 効用関数の形状

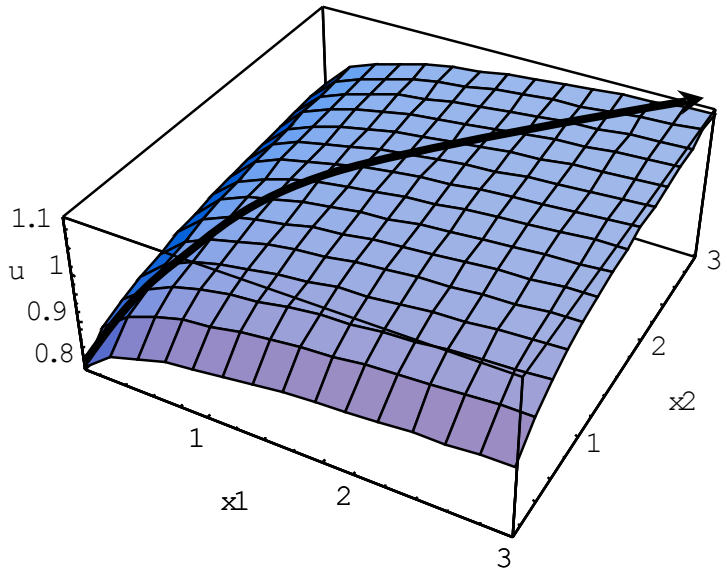
$u=x^{\alpha}y^{\beta}$, $\alpha+\beta>1$;　$\alpha=3$, $\beta=3$

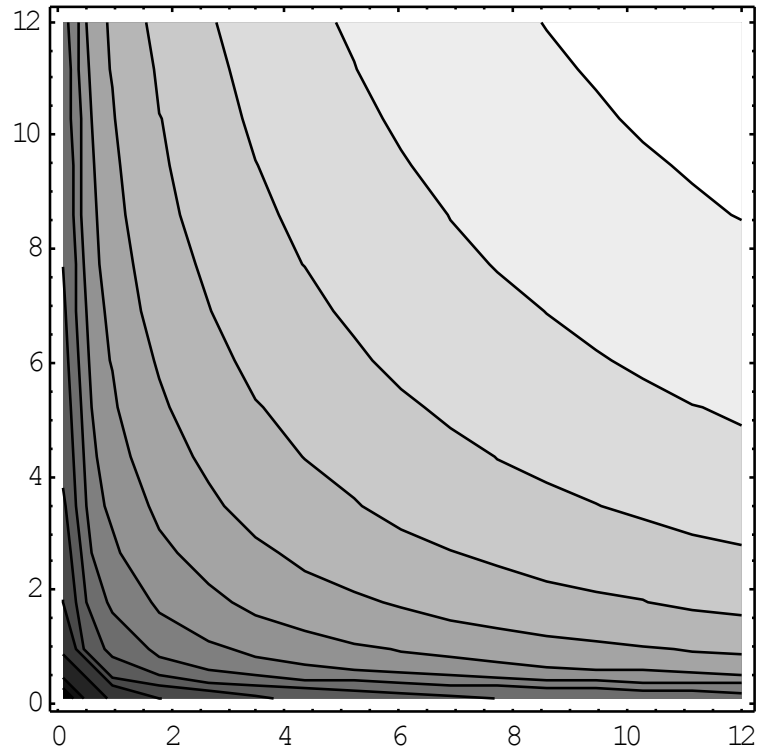


# 効用関数の形状

$u=x^{\alpha}y^{\beta}$, $\alpha+\beta<1;\alpha=0.1,\ \beta=0.1$

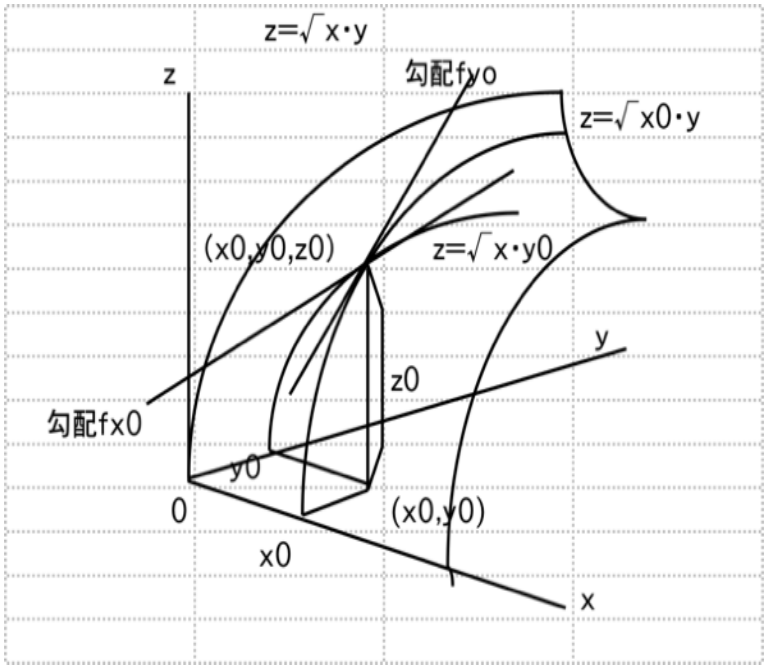


# Mathematica
# 等高線

```
ContourPlot[Sqrt[x y], {x, 0, 3}, {y, 0, 3}]
Plot3D[Sqrt[x y], {x, 0, 2}, {y, 0, 2}, AxesLabel -> {"x", "y", "z"},  RegionFunction -> Function[{x, y}, Sqrt[x y] <= 1], Mesh -> False]
ContourPlot[Min[x, y], {x, 0, 2}, {y, 0, 2}, Contours -> 10]
Plot3D[Min[x1, x2], {x1, 0, 2}, {x2, 0, 2},  AxesLabel -> {"x1", "x2", "z"},  Mesh -> False]
```

# 効用関数u(x,y) と接線（図5.6(1)）




効用関数$z=x^{0.5}y^{0.5}$

基準点 $(x_0,y_0,z_0)$

=(1.44, 0.81, 2.25)

$x_0$=1.44 のときの$f_x$＝3/8

$y_0$=0.81のときの$f_y$=2/3

接平面の方程式：

z–2.25 =(3/8)(x–1.44) +(2/3)(y–0.81)

法線の方程式：

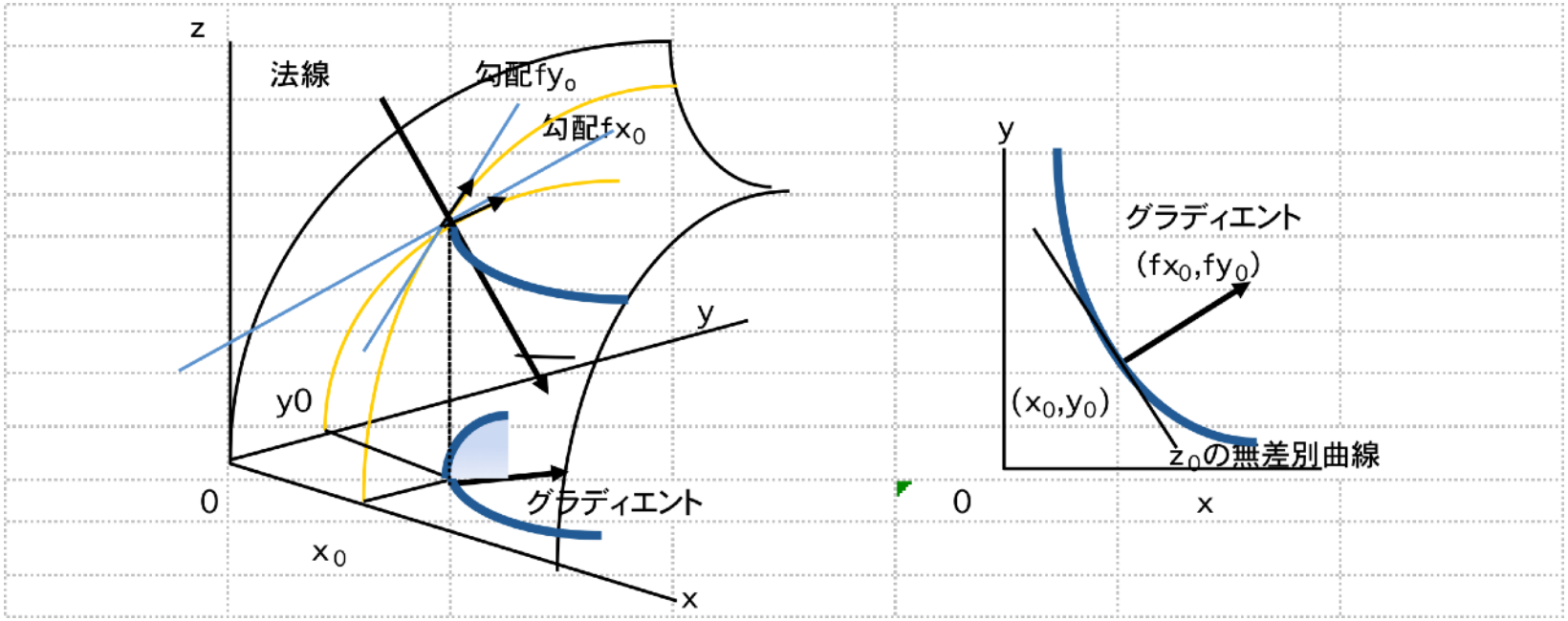
(x,y,z)=(1.44, 0.81, 2.25) + t(3/8, 2/3, –1)

法線ベクトルの最初の2成分がグラディエント

第1成分は x 軸方向、第2成分は y 軸方向の傾き

# グラディエントと無差別曲線

# （図5.7）



# 予算線

予算線$w = p_1 x_1 + p_2 x_2$

予算関数$w = g(x_1, x_2) = p_1 x_1 + p_2 x_2$

$g(x_1, x_2)$は予算の高さ$w$を表す。

規準点での関数$g(x_1, x_2)$の接平面の方程式

$$w - w_0 = g_{x_{10}}(x_1 - x_{10}) + g_{x_{20}}(x_2 - x_{20})$$

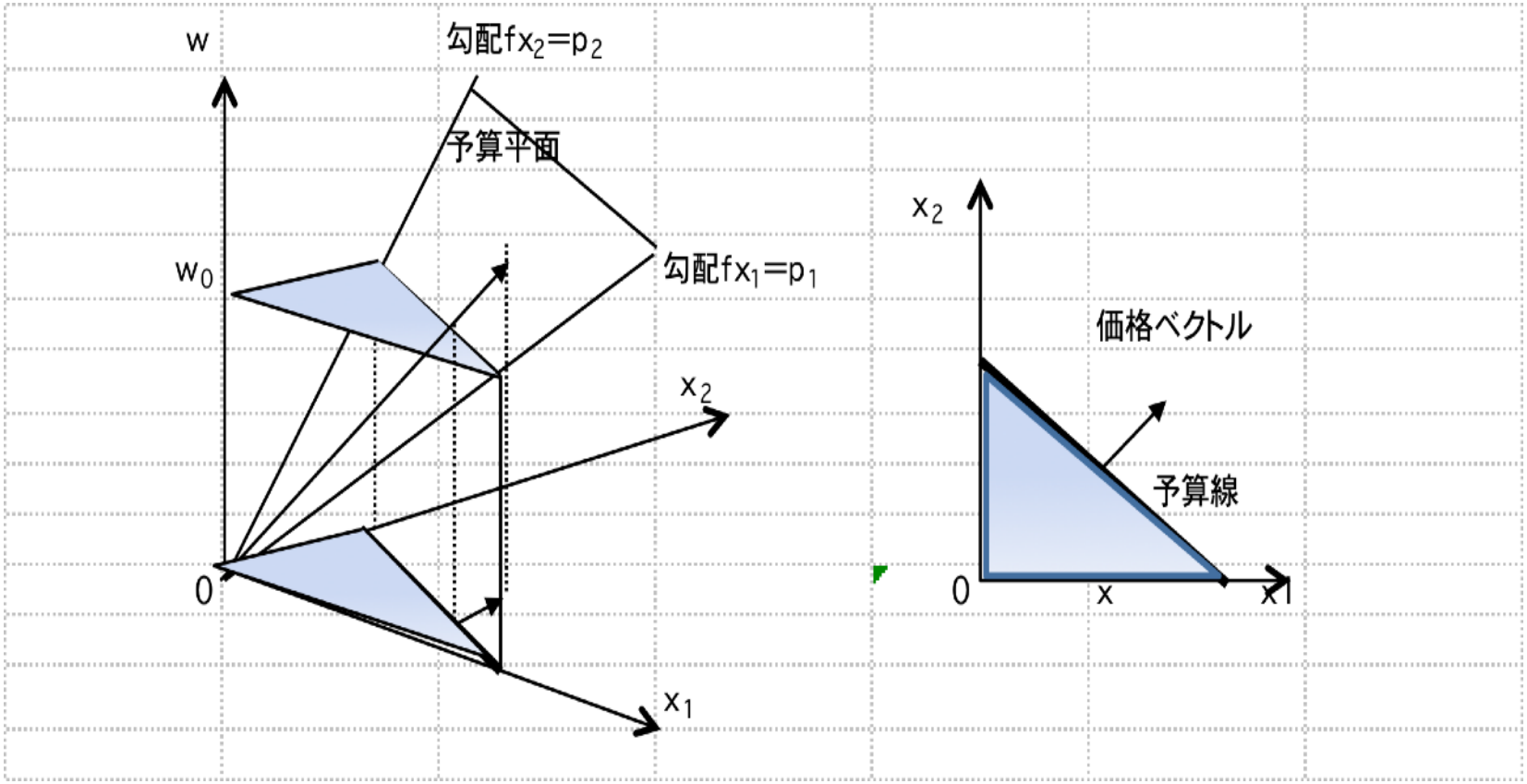
予算線の接平面の方程式

$$w - w_0 = p_1(x_1 - x_{10}) + p_2(x_2 - x_{20})$$

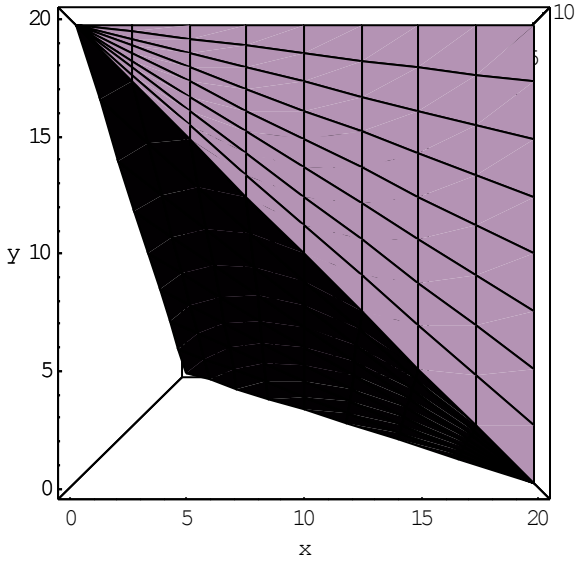
予算線はグラディエントとして価格ベクトル $(p_1, p_2)$を持つ。

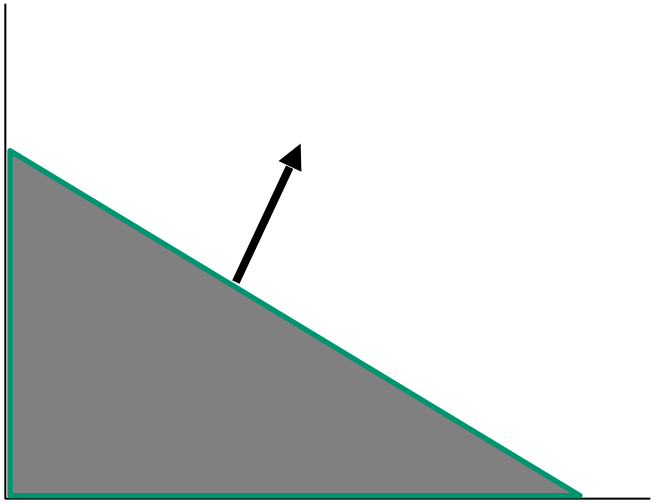
このグランディエントを成分として持つ法線ベクトルは $N = (p_1, p_2, -1)$

# 予算線と価格ベクトル（図5.8）



# 予算線グラフィックス



# 効用関数の全微分

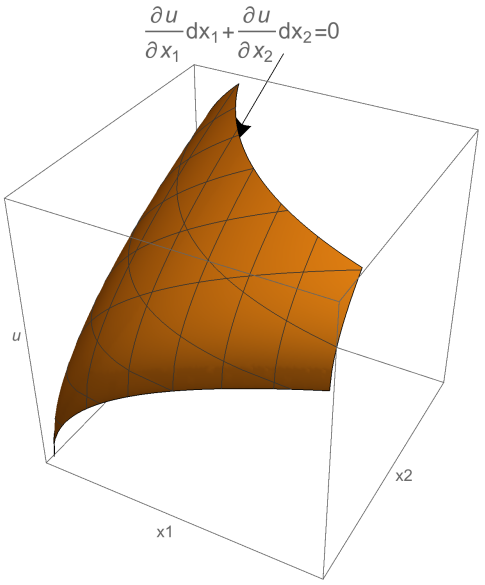
$$du = \frac{\partial u}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial u}{\partial x_2} dx_2$$

$$= u_{x_1} dx_1 + u_{x_2} dx_2$$

効用水準の変化$du$

= 財1の限界効用$u_{x_1}$ × 消費水準の変化$dx_1$

財2の限界効用$u_{x_2}$ × 消費水準の変化$dx_2$



# Total differentiation and the marginal rate of substitution

$$du = \frac{\partial u}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial u}{\partial x_2} dx_2$$

$$= u_{x_1} dx_1 + u_{x_2} dx_2$$

The variation of utility level $du$

= Marginal utility of good 1 $u_{x_1}$

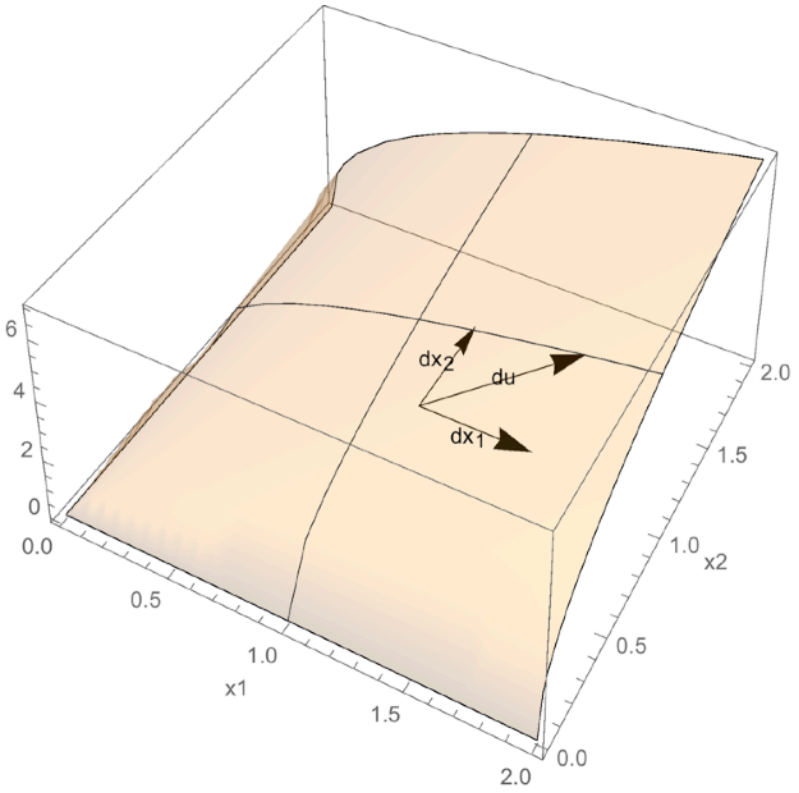
× Change of unit consumption of good 1 $dx_1$

+ Marginal utility of good 2 $u_{x_2}$

× Change of unit consumption of good 2 $dx_2$

Marginal rate of substitution between good 1 and good 2

$$\frac{dx_2}{dx_1} = -\frac{\partial u}{\partial x_2} / \frac{\partial u}{\partial x_1}$$



# 限界代替率逓減

無差別曲線 $du = 0$.(需要が変動しても効用水準が変化しない状態)

$u_{x_1} dx_1 + u_{x_2} dx_2 = 0$

限界代替率 $\frac{dx_2}{dx_1} = -\frac{u_{x_1}}{u_{x_2}}$.

$\frac{dx_2}{dx_1}$:財2の財1に対する限界代替率

$u_{x_1}$:財1の限界効用; $u_{x_2}$:財2の限界効用

代替関係。財1の増加に財2の減少が対応。

なぜなら、同時に増加すれば効用が増加することになり、

$du = 0$ に矛盾。

財1の需要が増加すれば$u_{x_1}$は減少。

財2の需要が減少すれば$u_{x_2}$は増加。

$\frac{dx_2}{dx_1} = -\frac{u_{x_1}}{u_{x_2}} = -\frac{u_{x_1}(減少)}{u_{x_2}(増加)}$ = 全体的に減少

# 最適消費計画問題

効用最大化問題

$w = g(x_1, x_2)$を制約として$f \quad (x_1, x_2)$を最大化する。

効用最大化問題では限界代替率と価格比が等しい。

$$\frac{dx_2}{dx_1} = -\frac{p_1}{p_2}$$

目的関数のグラディエント　$\nabla f = (f_{x_{10}}, f_{x_{20}})$

制約関数のグラディエント　$\nabla g = (g_{x_{10}}, g_{x_{20}})$

最適解必要条件：効用最大点で二つのグラディエントは比例する。

比例定数λをラグランジュの乗数と呼ぶ。

$\nabla f \propto \nabla g$ あるいは　$\nabla f = \lambda \nabla g$

# 最適解(図5.10)

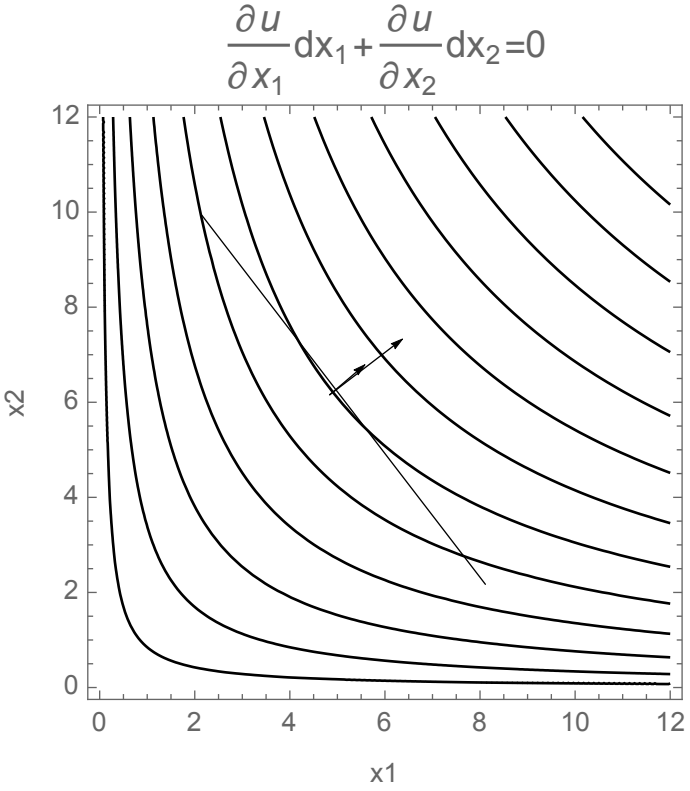
基準点 $(x_1, x_2) = (3, 4)$で

$\nabla f \propto \nabla g$

$\nabla f = (0.5774,\ 0{,}4330)$

$\nabla g = (1.333,\ 1)$

$\nabla f = 0.4330 \nabla g$



# ラグランジュの未定乗数法

$g(x,y) = k$を制約とする$f\ \ (x,y)$の最適値問題

ラグランジュ関数

$L(x,y,\lambda) = f(x,y,\lambda) - \lambda\{g(x,y) - k\}$

最適値を与える$x\ \ ,y,\lambda$で計算するとき

$L$の導関数にかんしてそれぞれ次式を満たす。

（導関数の簡略記号を$L_x = \dfrac{\partial L}{\partial x}; f_x = \dfrac{\partial f}{\partial x}$と置く。）

$L_x = f_x - \lambda g_x = 0\ [\Rightarrow f_x = \lambda g_x]$

$L_y = f_y - \lambda g_y = 0\ [\Rightarrow f_y = \lambda g_y]$

$L_\lambda = \ -g\ +\ \ k\ = 0\ [\Rightarrow g\ =\ k\ ]$

# 微分公式

$$\frac{dx^2}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x+\Delta x)^2 - x^2}{\Delta x} = 2x$$

$$\frac{(x+\Delta x)^2 - x^2}{\Delta x} = \frac{x^2 + 2x\Delta x + (\Delta x)^2 - x^2}{\Delta x}$$

$$= \frac{\Delta x(2x+\Delta x)}{\Delta x} = 2x + \Delta x$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} 2x + \Delta x = 2x$$

公式 $\frac{dx^n}{dx} = nx^{n-1}$

$$\frac{dx^{0.5}}{dx} = 0.5x^{0.5-1} = 0.5x^{-0.5}; \quad \frac{dx^{-1}}{dx} = -1x^{-1-1} = -x^{-2} = -\frac{1}{x^2}$$

# 効用最大化問題の解
# (需要関数)

効用関数$u = x_1^{\alpha} x_2^{\beta}$; 予算制約 $p_1 x_1 + p_2 x_2 = w$

$$L(x_1, x_2, \lambda) = x_1^{\alpha} x_2^{\beta} - \lambda\{ p_1 x_1 + p_2 x_2 - w\}$$

$$L_{x_1} = \frac{\partial u}{\partial x_1} - \lambda p_1 = 0 \Rightarrow \frac{\alpha u}{x_1} = \lambda p_1 \quad [式1]$$

$$L_{x_2} = \frac{\partial u}{\partial x_2} - \lambda p_2 = 0 \Rightarrow \frac{\beta u}{x_2} = \lambda p_2 \quad [式2]$$

$$L_{\lambda} = (p_1 x_1 + p_2 x_2) - w = 0 \Rightarrow p_1 x_1 + p_2 x_2 = w \quad [式3]$$

式1,2を式3に代入する。

$$\lambda = \frac{(\alpha + \beta) u}{w}$$

これを式 1,2に代入して最適解を得る。

$$x_1 = \frac{\alpha w}{(\alpha + \beta) p_1}; \; x_2 = \frac{\beta w}{(\alpha + \beta) p_2}$$

# Mathematica
# ラグランジュ未定常数法

```
ClearAll[x1, x2]

sol = Solve[  D[2 x1^a x2^b - \[Lambda] (p1 x1 + p2 x2 - 1), x1] == 0
&&    D[2 x1^a x2^b - \[Lambda] (p1 x1 + p2 x2 - 1), x2] == 0, {x1, x2} ]

x1/x2 /. {sol[[1, 1]], sol[[1, 2]]}

FullSimplify[%]

solfinal =  Solve[x1/x2 == (a p2)/(b p1) && p1 x1 +
p2 x2 == 1, {x1, x2}]

Plot[10 a /((a + b) x1) /. {a -> 0.6, b -> 0.4}, {x1, -0.1, 1},  AxesLabel ->
{"x1", "p1"}]
```

# 効用最大化問題の実例

効用関数$u = x_1^{0.5} x_2^{0.5}$; 予算制約 $p_1 x_1 + p_2 x_2 = 10$

$L(x_1, x_2, \lambda)$ = 目的関数$u$ − 未定乗数$\lambda$｛制約式｝

$$= x_1^{0.5} x_2^{0.5} - \lambda\{ p_1 x_1 + p_2 x_2 - 10\}$$

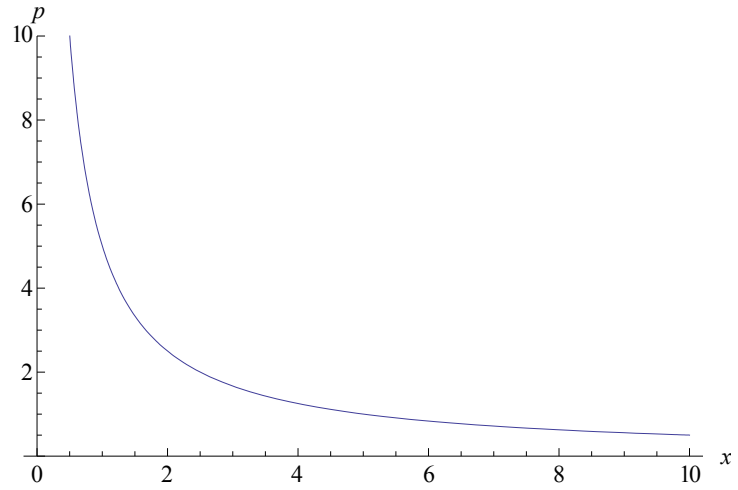
$$L_{x_1} = \frac{\partial u}{\partial x_1} - \lambda p_1$$

$$= 0.5 x_1^{-0.5} x_2^{0.5} - \lambda p_1 = 0.5 \frac{x_1^{0.5} x_2^{0.5}}{x_1} - \lambda p_1 \quad = 0.5 \frac{u}{x_1} - \lambda p_1 = 0 \quad [式1]$$

$$L_{x_2} = \frac{\partial u}{\partial x_2} - \lambda p_2 = 0.5 \frac{u}{x_2} - \lambda p_2 = 0 \quad [式2]$$

$$L_\lambda = (p_1 x_1 + p_2 x_2) - 10 = 0 \Rightarrow p_1 x_1 + p_2 x_2 = 10 \quad [式3]$$

# 例題の需要関数




式1,2を式3に代入する。

$$\lambda = \frac{(\alpha+\beta)u}{w} = \frac{(0.5+0.5)u}{10} = \frac{u}{10}$$

式1,2にλを再代入する。

[式1] $0.5\frac{u}{x_1} - \lambda p_1 = 0$

$$\Rightarrow 0.5\frac{u}{x_1} - \frac{u}{10}p_1 = 0 \Rightarrow \frac{0.5}{x_1} = \frac{p_1}{10}$$

$$x_1 = \frac{5}{p_1}; x_2 = \frac{5}{p_2}$$

財$i$の需要$x_i$は財$i$の価格$p_i$に反比例する。

# より一般的なケース

効用関数$u = x_1^{0.5} x_2^{0.5}$; 予算制約 $p_1 x_1 + p_2 x_2 = p_1 e_1 + p_2 e_2$

$L(x_1, x_2, \lambda)$ = 目的関数$u$ − 未定乗数$\lambda$｛制約式｝

$= x_1^{0.5} x_2^{0.5} - \lambda\{ p_1(x_1 - e_1) + p_2(x_2 - e_2)\}$

このとき、需要関数は以下の形になる。

$$x_1 = \frac{p_1 e_1 + p_2 e_2}{2p_1};\ x_2 = \frac{p_1 e_1 + p_2 e_2}{2p_2}$$

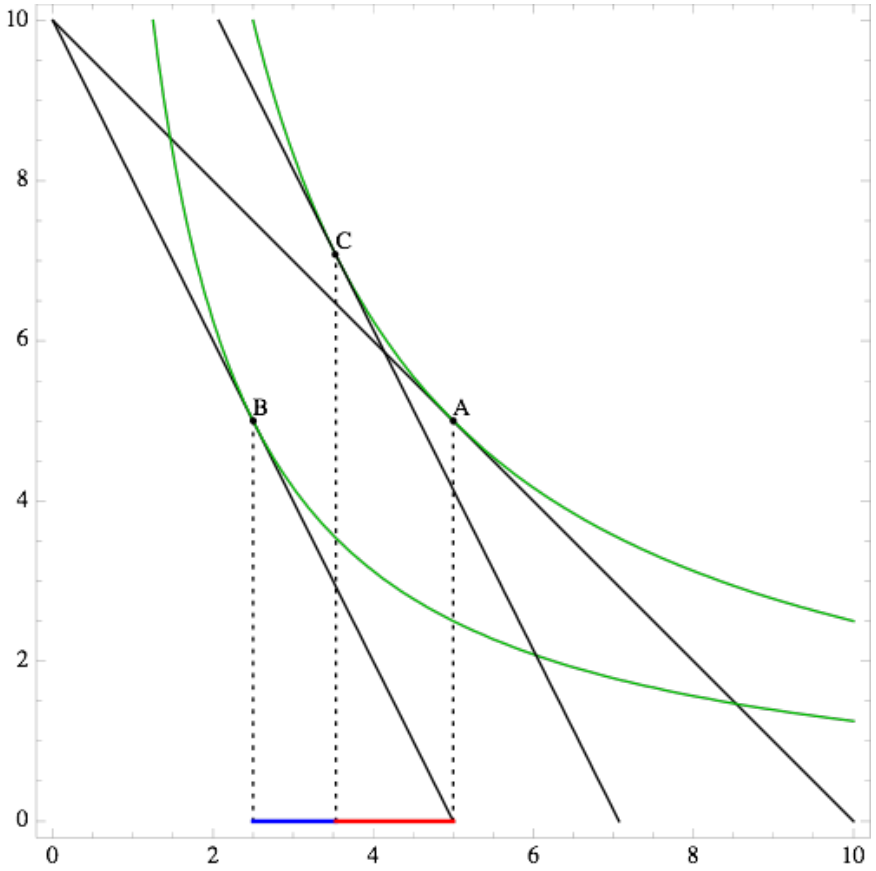
財1の需要$x_1$にかんして全微分をとると

$$dx_1 = \frac{e_2(p_1 \Delta p_2 - p_2 \Delta p_1)}{2p_1^2}$$

よって$x_1$の変化は価格$p_2$と価格変動$\Delta p_2$にも依存するようになる。

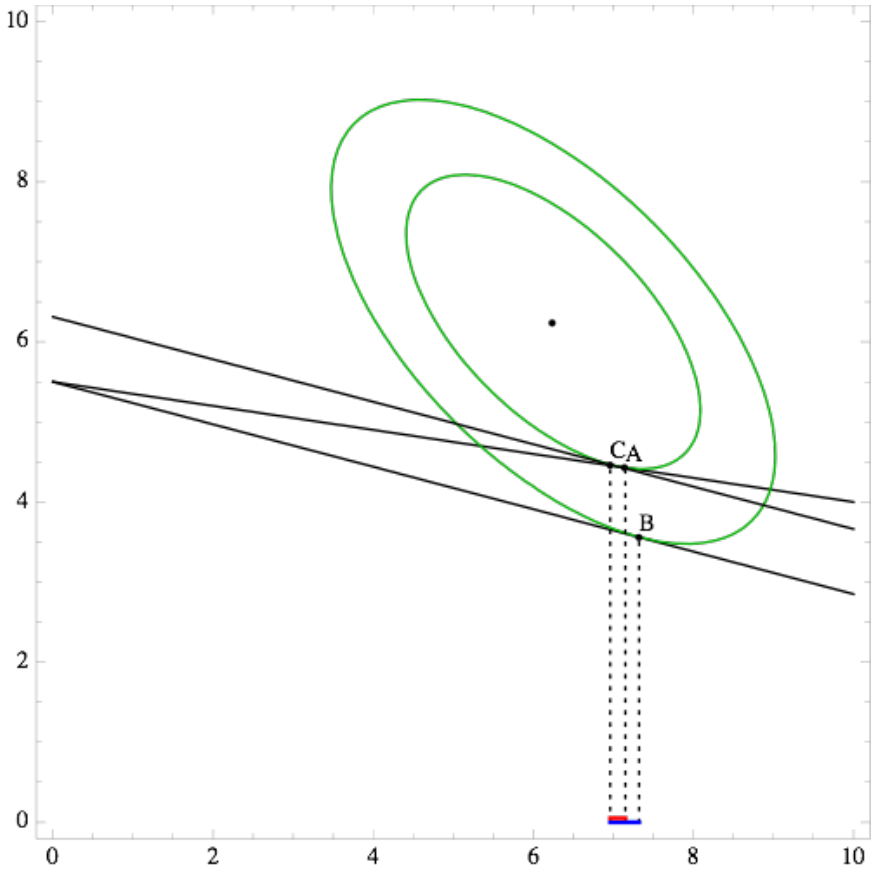
# 代替効果と所得効果の標準的説明

http://demonstrations.wolfram.com/IncomeAndSubstitutionEffectsWithDifferentUtilityFunctions/



# ギッフェン財のケース

赤<青



# 逐次的・確率的効用理論

ルース離散的選択理論、２項ロジット
確率、２項ロジット効用

# 人間万事塞翁が馬

「**塞翁が馬**」

中国北辺の塞翁という名の老人の馬が逃げたが、後に立派な馬をつれて帰ってきた。老人の子がその馬から落ちて脚を折ったが、そのために戦争に行かずにすんだ。このように人生の吉凶は簡単には定めがたいという「**淮南子-人間訓**」の有名な故事。

効用最大化による選択は、**逐次的過程**では、かならずしも、次の最適化を意味するものではない。

**見えざる手の動学**は、他者の利害を考えずに近視眼的最適化を連続していれば長期的最適化が保障されるという便利な考え方であったが、これはもともと故事と相反する考えで、従来、東洋的な考え方でない。

# 逐次的効用理論

Luce(1959)を起源としている離散的選択理論は**逐次的選択**を取り扱うことができる。これは**多項ロジットモデル**へすぐに変換できるので、確率選好モデリングによる応用解析の実用化に直結している。

Ben-Akiva and Lerman(1985)などを見よ。しかし、正統派経済理論の分野では中心的論点となることはなかった。

**逐次的選択を説明する例題**

今日、仲間とランチに行くことを決めた。街にはレストランは数箇所あるが、市役所通りにはお好みのナイスなレストランがある。このレストランは大変人気があるのでいつも混雑している。そこで正午より早めに出かけることに決めた。ところが今日はフェスティバル開催の日だった。見物のため公園を通って行くことに決めたが、これは中央通りの市電を使うことになる長い道程である。さて、われわれはオフィスに近いレストランに行くことにするか、お気に入りのレストランに行くことにするのかどうか。

# 古典的効用理論と多数決均衡の不決定性

**Prof. Donald Saari**
**University of California**

多項ロジット効用は、伝統的な効用理論が取り扱わなかった観点、つまり、逐次的選択論を可能にした点で画期的であるが、以下、効用理論が多数決決定に及ぼす影響を調べたい。まず、古典的効用理論と「多数決決定」の関係を論じる。後にCALTECHの実験経済学者として著名になるCharles Plott(1967)は*American Economic Review*誌上で「多数決均衡」が偶然でしか得られないこと、均衡確定に効用理論は均衡に何も貢献しないことを見抜いた。実は、この問題はSonnenschein (1972)によってアダムスミスの見えざる手への疑問として定式化され、最終的にはSaari (1992), (1995b)によって解決された問題である。全体的見通しについてはSaari(2015)が詳しい。

# 古典的効用理論の多数決

$m$人が、それぞれ$m$個の古典的な効用関数$U^i(i = 1,\dots,m)$に従って、$n$個の変数$(x_1,\dots,x_n)$の大小で選好を決めるとする。このとき、各個人$i$について、ある微小なアクション$b_k = (x_1^*,\cdots,x_n^*)$にかんして

$$\nabla U^i b_k = \frac{\partial U^i}{\partial x_1} dx_1^* + \frac{\partial U^i}{\partial x_2} dx_2^* + \cdots + \frac{\partial U^i}{\partial x_n} dx_n^*$$

を定義する。

いま個人$i$は以下の不等号にしたがって、このアクション$b_k$の選好を決める。

支持 **For:**

$$\nabla U^i b_k > 0$$

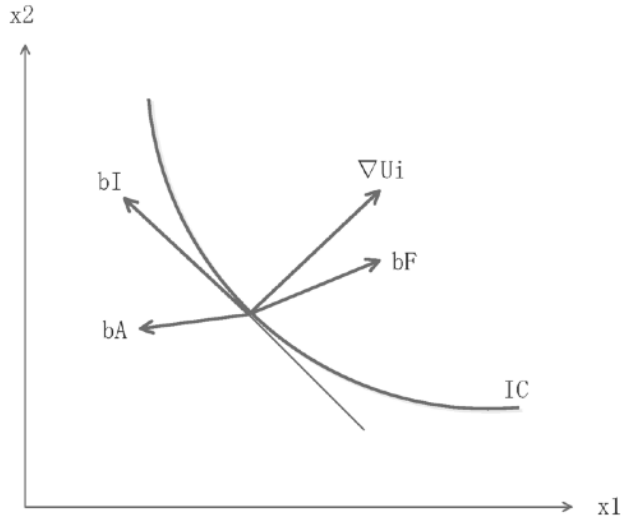
中立 **Indifferent:**

$$\nabla U^i b_k = 0$$

反対 **Against:**

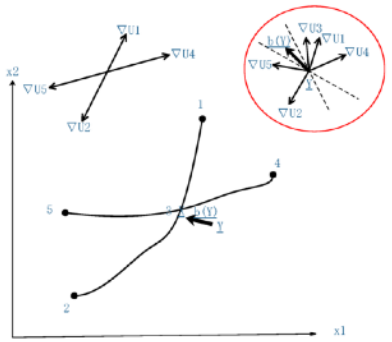
$$\nabla U^i b_k < 0$$

個人$i$の選好にとって、個人の効用のグラディエント$\nabla U^i$が微小なアクションのグランディエント$b_k$対して成す角度が、鋭角なら支持**F**、直角なら中立**I**、鈍角なら反対**A**となる。これを幾何的にグラディエントを用いて示せばFig B1のようになる。ここで、$IC$は個人$i$の無差別曲線である。

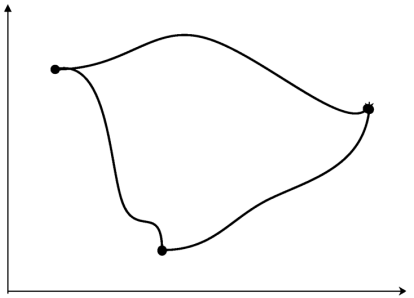


# ２選択肢の多数決不決定性

つぎに、多数決を議論するために、Plott(1967)に従い、同じ２次元平面$(x_1, x_2)$上に契約曲線を導入してみる。番号$1,\cdots,5$は各個人の最大効用点を表している。各点の配置がFig.8のようになっている。このとき、個人３の最大点が二つの契約曲線({1,2},{4,5} )の交点に位置しているので、個人３は最大点を個人1,2とも個人4,5とも共有しているので、多数決均衡は唯一、点3である。



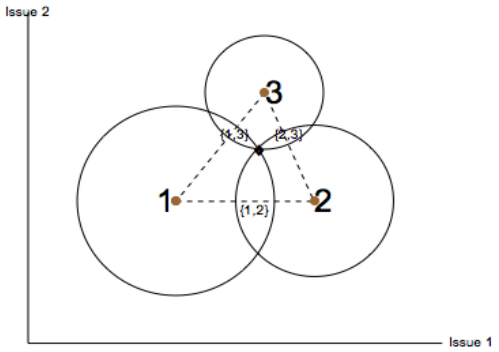

いま均衡点3の周辺の$\underline{Y}$で、$\underline{Y}$から$\underline{X}$へ向かう微小変化$b(\underline{Y})$が発生したとする。この微小変化が5名から支持されるかどうかを吟味する。これはやはり微小変化$b(\underline{Y})$が既存のグラディエント$\nabla U^i$と成す角が鋭角か鈍角かであるかによって判定できる。したがって、Fig.B2の右上の参考図から、個人{1,3,5}が支持**F**、個人{2,4}が反対**A**となり、この場合は多数決によりこの動きが支持される。これらの多数決均衡はパレート均衡であるが、その逆は成り立たない。



# Saariの図解　提携の形成

プロットの図法を用いて、Saari(2004, 380 図2)は、図B4を用いて投票者の結託形成を表示した。図B4の三角形の頂点{1,2,3}は投票者の理想点を示す。そして、それぞれの投票者の理想点を中心として円が描かれる。各円はいずれも図の中央にあるダイヤモンド🔷を通過している。各円の内点はそれぞれの投票者の理想点に近い。反対に、円の外側は選好されない。ゆえに、投票者は、ダイヤモンド🔷よりも自分の円の内点を選好する。

さて、投票者は3名{1,2,3}である。「多数派」あるいは「提携」は{1,2},{2,3},{1,3}である。これらはそれぞれ「三つ葉」の一つに対応する。三つ葉内部では、多数派の投票者はいずれの場合も、ダイヤモンド🔷よりも葉の内部の領域を選好する。このことは、いかなる多数派も常に提携によりダイヤモンド🔷よりよい改善を提案できるということを意味する。実は、この結論は、多数決均衡を決定できないというプロットの結論の言い換えにすぎない。プロットの議論で図解できるのは２選択肢問題にすぎなかった。サーリはさらに発展させて３選択肢問題を扱える幾何学を提案した。



# ルース確率的効用理論

## 選択公理

選択肢S個の集合上で個人が選択する選択肢$R \subseteq S$であるときの確率を$P_S(R)$と記す。このとき、集合$T$は以下の「ルースの公理」を満たす集合である。

$S \subset T, 0 \leq P_T \leq 1$であるとき、S上に条件付確率$P_S$が定義できる。

事象$A$の確率を$P(A)$で記す。
$P(A,B) = P_{\{A,B\}}(A),\ P(B,A) = P_{\{A,B\}}P(B)$で記す。

## 確率的効用関数

いま選択項目（事象）を$a, b$に限って、$v(a)$に$e^{\mu V_a}$、$v(b)$に$e^{\mu V_b}$を代入する。また$S = C = a, b$とする。

このとき、離散的選択肢aを選好する**2**項ロジット確率はつぎのようになる。

$$P_{a,b} = \frac{e^{\mu V_a}}{e^{\mu V_a} + e^{\mu V_b}}$$

なお、ロジット確率と言われる所以は、ロジットの形$\frac{1}{1+e^{-z}}$をしているからである。

# ルース確率的効用理論

## 選択公理

選択肢S個の集合上で個人が選択する選択肢$R \subseteq S$であるときの確率を$P_S(R)$と記す。このとき、集合$T$は以下の「ルースの公理」を満たす集合である。

$S \subset T, 0 \leq P_T \leq 1$であるとき、S上に条件付確率$P_S$が定義できる。

事象$A$の確率を$P(A)$で記す。
$P(A,B) = P_{\{A,B\}}(A),\ P(B,A) = P_{\{A,B\}}P(B)$で記す。

## 確率的効用関数

いま選択項目（事象）を$a, b$に限って、$v(a)$に$e^{\mu V_a}$、$v(b)$に$e^{\mu V_b}$を代入する。また$S = C = a, b$とする。

このとき、離散的選択肢aを選好する**2**項ロジット確率はつぎのようになる。

$$P_{a,b} = \frac{e^{\mu V_a}}{e^{\mu V_a} + e^{\mu V_b}}$$

なお、ロジット確率と言われる所以は、ロジットの形$\frac{1}{1+e^{-z}}$をしているからである。

# 2項ロジット確率

v(a)に$e^{\mu Va}$、v(b)に$e^{\mu Vb}$を代入する。またS=Cとする。
このとき、

$$P_{\{a,b\}}(a) = \frac{e^{\mu V_a}}{e^{\mu V_a} + e^{\mu V_b}}.$$

この確率が離散的選択肢$a$を選好する**2項ロジット**確率。

ロジットの形$1/(1+e^{-z})$をしている。

$\{a,b\}$2項のみの選択に限っている。

上式は、離散的選択理論の定式化とは独立的に、確率的選好(**random preference**)の設定からも同様に導出できる。換言すれば、**多項ロジット確率**は、「ルース型**非新古典派的**離散的選択モデル」からも「**新古典派的**確率選好モデル」のどちらからも導出できる

# 2項ロジット効用の計算

**選択コスト**　モードが2個の場合の選択コスト

| session | mode 1 | mode 2 | chosen mode |
|---|---|---|---|
| 1 | 30 | 50 | mode 1 |
| 2 | 20 | 10 | mode 1 |
| 3 | 40 | 30 | mode 2 |

確率を計算する。観察によれば、第1節ではmode 1が選ばれ、第2節ではmode 1が選ばれ、第3節ではmode 2が選ばれている。よって、各節$t$で選ばれるmode $j$の確率 は次のようになる。

$$P_{11}=\frac{\exp(30\beta)}{\exp(50\beta)+\exp(30\beta)}=\frac{1}{1+\exp(20\beta)} \quad (1)$$

$$P_{12}=\frac{\exp(20\beta)}{\exp(10\beta)+\exp(20\beta)}=\frac{1}{1+\exp(-10\beta)} \quad (2)$$

$$P_{23}=\frac{\exp(40\beta)}{\exp(40\beta)+\exp(30\beta)}=\frac{1}{1+\exp(-10\beta)} \quad (3)$$

# ルース選択公理

選択肢不完全識別のケース

すべての$A_i, A_j \in T$にたいして$P(A_i, A_j) \neq 0,1$であるとき、$R \subset S \subset T$にたいして

$$P_T(R) = P_S(R)P_T(S)$$

不完全識別のケースの条件付き確率は

$$P_T(R|S) = \frac{P_T(R \cap S)}{P_T(S)}$$

である。ここで、$R \subset S \subset T$にたいして$P_S(R) = P_T(R|S)$が成り立つ。

選択肢完全識別のケース

すべての$A_i, A_j \in T$にたいして$P(A_i, A_j) = 0$であるとき、どの$S \subset T$にたいしても

$$P_T(S) = P_{T-\{A_i\}}P_T(S - \{A_i\})$$

このとき、あらゆる$C \subset S$に対して次式が成り立つ。

$$P_C(s) = \frac{\nu(a)}{\sum_{s \in U} \nu(s)}$$

を満たす関数$\nu: C \to R$が存在する。関数$\nu$はこの離散選択における効用関数に相当する。関数$\nu$は定数倍を除いて一意的である。

# 不完全識別のケース

**不完全識別の確率**

3選択肢$\{A, B, C\}$のケースで、不完全識別のケースの確率を与える。

$$P(X) = \frac{P(X,Y)P(X,Z)}{P(X,Y) + P(X,Z) - P(X,Y)P(X,Z)}$$

$$P(B,C) = \frac{P(A,C)P(B,A)}{P(A,B)P(C,A)+P(B,A)P(A,C)}$$

ここで、$X, Y, Z$は$A, B, C$の代理変数である。

**公式**

$$P(A) = \frac{P(A,B)P(A,C)}{P(A,B) + P(A,C) - P(A,B)P(A,C)};$$

$$P(B) = \frac{P(B,A)P(B,C)}{P(B,A) + P(B,C) - P(B,A)P(B,C)};$$

$$P(C) = \frac{P(C,A)P(C,B)}{P(C,A) + P(C,B) - P(C,A)P(C,B)};$$

$$P_T(A) = a, P_T(B) = b,$$

$$P_T(C) = c, P(A,B) = \frac{a}{a+b},$$

$$P(B,A) = \frac{b}{a+b},$$

$$P(A,C) = \frac{c}{a+c}$$

これらを上の３式に代入すると、

$$P(A) = \frac{a}{a+b+c}, P(B) = \frac{b}{a+b+c}, P(C) = \frac{c}{a+b+c}$$

上記の関係式に注意すると、

$$P(B,C) = \frac{b}{b+c}$$

# 選択手順

降順アプローチ

best-first approach

まずトップランクの選択肢$A$を尤度$P_T(A)$で選択してから、つぎに残り２つの選択肢$\{B, C\}$から$B$を確率$P(B, C)$で選ぶ。

この選択手順を次式で表す。

$$R(A \succ B \succ C) = P_T(A)P(B, C)$$

昇順アプローチ

worst-fit approach

まず最下位ランクの選択肢$C$を$P_T^*(C)$を選択してから、つぎに残り２つの$\{A, B\}$から劣位の選択肢$B$を確率$P^*(B, A)$で選ぶ。

この選択手順を次式で表す。

$$R^*(A \succ^* B \succ^* C) = P_T^*(A)P^*(B, C)$$

# ルースの定理

「降順アプローチ」と「昇順アプローチ」がつねに一致するには、以下の定理が示すきわめて厳しい条件が必要であることがわかる。

**ルース定理**(Luce, 1959, p. 69).

確率空間$P$と$P^*$が$T = \{A, B, C\}$上で定義され、すべての２項ごとの選択肢の**識別が不完全である場合**に、$P$と$P^*$が選択公理を満たすと仮定する。このとき、

$$R(A \succ B \succ C) = R^*(A \succ^* B \succ^* C) \quad (19)$$

となる**必要十分条件**は

$$P(A, B) = P(B, C) \quad (20)$$

# 三選択肢問題

| タイプ番号 | ランキング | 投票数 | 確率 |
|---|---|---|---|
| 1 | A≻B≻C | 7 | 0.2 |
| 2 | A≻C≻B | 2 | 0 |
| 3 | C≻A≻B | 4 | 0.3 |
| 4 | C≻B≻A | 6 | 0 |
| 5 | B≻C≻A | 0 | 0.2 |
| 6 | B≻A≻C | 8 | 0.3 |

# 選好プロファイルの幾何学的解析

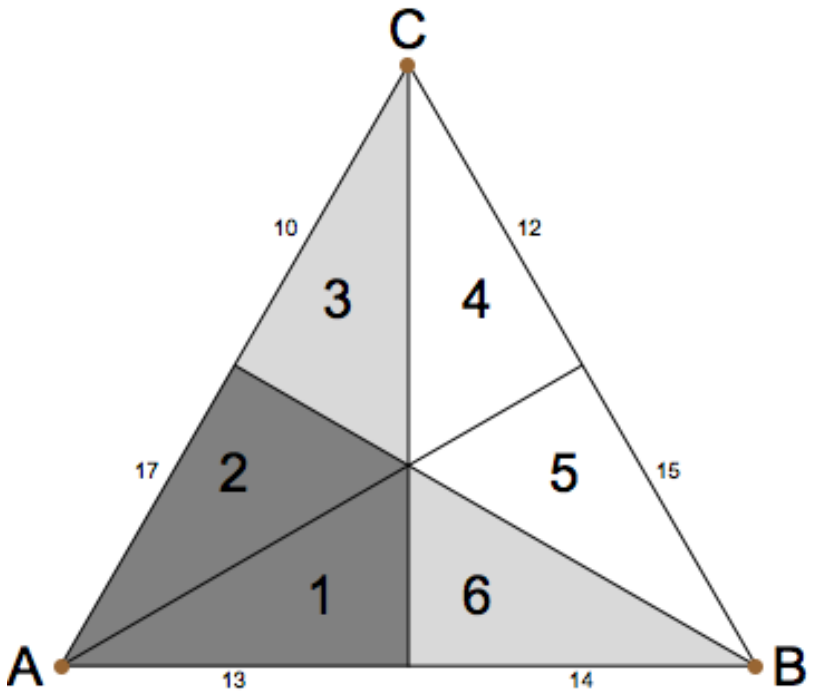
三角形の頂点{A,B,C}は選択肢の理想点を表示している。三角形ABCは6個の小三角形{1,2,3,4,5,6}に分割される。頂点Aは小三角形{1,2}の領域内の投票者によって支持される。頂点Cは小三角形{3,4}の領域内の投票者によって支持される。頂点Bは小三角形{5,6}の領域内の投票者によって支持される。

小三角形$\Delta_1$の内点はどれもAにもっとも近く、つぎにBに近い。よって、$A \succ B$。さらに、$C$にはもっとも遠い位置にある。よって、$A \succ B \succ C$の選好が成立している。

小三角形$\Delta_1$と$\Delta_2$はAを最高ランクとして評価する領域である。
図11で濃いグレイの領域が対応する。
小三角形$\Delta_3$と$\Delta_6$は Bを第二位として評価する領域である。
図11でライトグレイの領域が対応する。

頂点Cからの辺ABへの垂線は2項選択でAとBが無差別な状態を示す。

三角形ABCの重心はいずれの頂点にたいしても同じ距離なので$A \sim B \sim C$である。

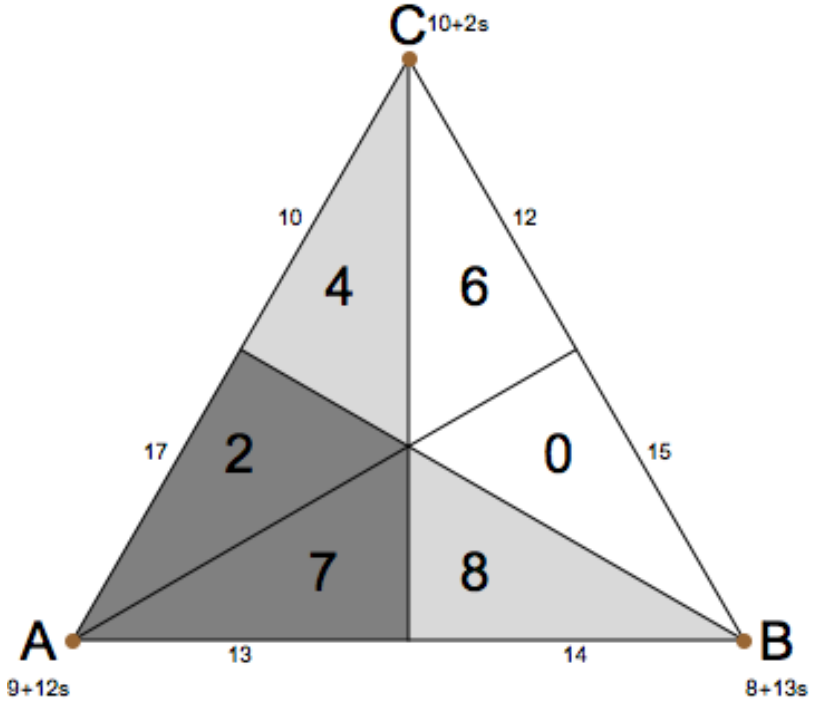


# 投票プロファイルの作成

投票プロファイルの作成

辺ABの中点の左側の小三角形$\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3$は、２項選択$\{A, B\}$で、$A$を支持。
よって、7+2+3=13票

辺ABの中点の右側の小三角形$\Delta_4, \Delta_5, \Delta_6$はは、２項選択$\{A, B\}$で、$B$を支持。
よって、6+0+8=14票



# 選択肢の加重値決定

投票決定のルールでは、投票者の選択肢の加重値を与えるいわゆる「位取りのルール」が重要である。

まず、極端なケースは、最高ランクの選択肢に１、他の選択肢には0の加重を与える。これは相対多数pluralityルールと呼ばれる。これとちょうど逆のルールは、最下位ランクの選択肢に0、他のすべての選択肢に１を与える。

$n$=3のケースでは、

$$w^3 = (w_1, w_2, w_3) = (1, s, 0) \mid w_j \geq w_{j+1}\ for\ j = 1,2$$

加重$w^3$による総得点は次式で表示できる。
$A$を最高ランクとして評価する投票者数　＋　$s$×$A$を第二位として評価する投票者数
i.e.,
小三角形$\Delta_1$と$\Delta_2$の得票者数　＋ $s$×小三角形$\Delta_3$と$\Delta_6$の得票者数

加重係数$s$は条件$w_j \geq w_{j+1}\ for\ j = 1,2$の範囲で任意に与えることができる。

加重係数$s = 0$ のとき相対多数ルール(Plurality rule)
加重係数$s = 0.5$のとき、ボルダルール(Borda rule)

頂点$A$の投票得点は、図8投票プロファイルを参照して、$(7 + 2) + s(8 + 4) = 9 + 12s$

ボルダルールは、１位評価に2点、２位評価に1点、３位評価に0点を与えて総得点を集計する。表1によれば、Aを１位評価する者９名、２位評価する者12名、3位評価する者6名なので総得点は30点である。いま、１位評価点数を１に規準化すれば、２位評価の加重は0.5になる。つまり、s=0.5。このとき、9 + s 12 = 15。

# 確率プロファイル空間

まず確率計算なので、加重値$w_j$の合計値

$$\sum_{j=1}^{n} w_j = 1 + s + 0 = 1 + s$$

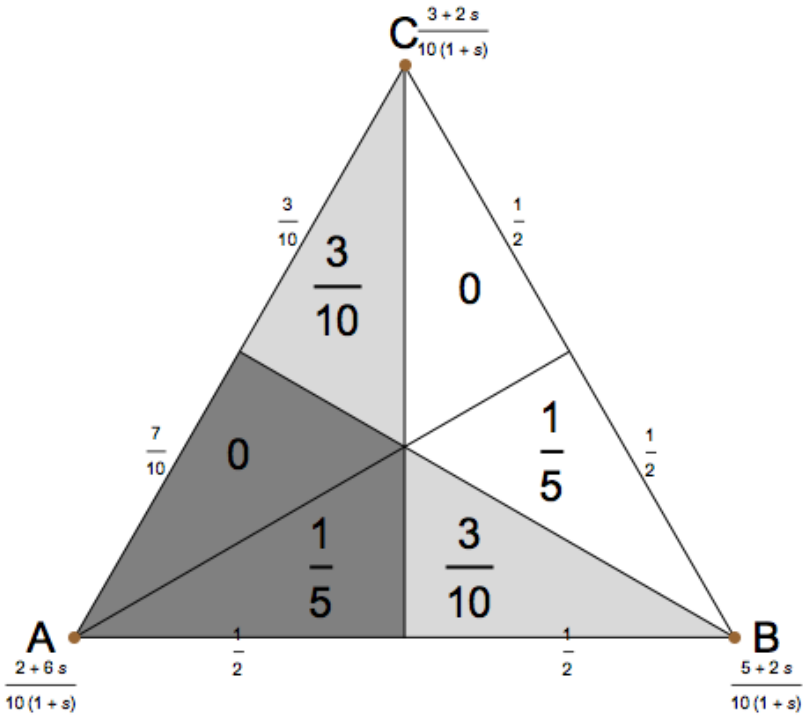
をつぎのように規準化する。

$$\sum_{j=1}^{n} w_j' = \frac{1}{1+s} + \frac{s}{1+s} + 0 = 1$$

したがって、確率プロファイルの頂点$A$は「確率プロファイル」を参照して、

$$\frac{1}{1+s}(7+2) + \frac{s}{1+s}(8+4) = \frac{2+6s}{(1+s)10}$$

以下同様にして頂点$B, C$を計算して、右図の確率プロファイルの数値を得ることができる。



# 交換均衡とコア

# 教科書第4章

単純物々交換経済、エッジワースボックスダイアグラム、交換均衡

# エッジワースの世界

Francis Ysidro Edgeworth (February 8, 1845 - February 13, 1926) は**無差別曲線**のほかに**ボックスダイアグラム**を開発した。ボックスダイアグラム上の無差別曲線は初期賦存量（所有量）を規準とするので、区別して、オファー曲線と呼ばれることがある。

無差別曲線の世界を前提として交換を考える。

交換には貨幣は用いない。つまり、バーター（物々交換）により交換を行う。

超過需要は無差別曲線に基づいて形成される。

> たとえば、**小豆の取引所の需要**はブローカーによって行われるため、小豆の個人主義的選好に基づいて重要が形成されるわけでない。

問題は**バーター経済**で超過需要をすべて解消することができる均衡価格体系を求めることである。

> この市場機構はきわめて特異なシステムであり現実的な機構とかけ離れている。

# 単純交換経済の仕組み

財の個数は2個としアヤメ（菖蒲）を財1, ユリ（百合）を財2とします。経済の主体は花子と太郎です。

各自 i がもつ初期賦存量$e^i$＝（$e^i_1$, $e^i_2$）は

$e^{花子}$＝（$e^{花子}_1$, $e^{花子}_2$）＝(19, 8)

$e^{太郎}$＝（$e^{太郎}_1$ , $e^{太郎}_2$）＝(7, 11)

つまり，花子は，交換あるいは財の再配分の以前に，アヤメ19本とユリ8本を所有しており，太郎は，アヤメ7本リ11本を所有している。

総賦存量$e$ =($e^{太郎}_1$ +$e^{花子}_1$ , $e^{太郎}_2$+$e^{花子}_2$ )

=（$e_1$ , $e_2$）=(26, 19)

# エッジワースボックスダイアグラム

2人2商品経済。

e点は初期配分点

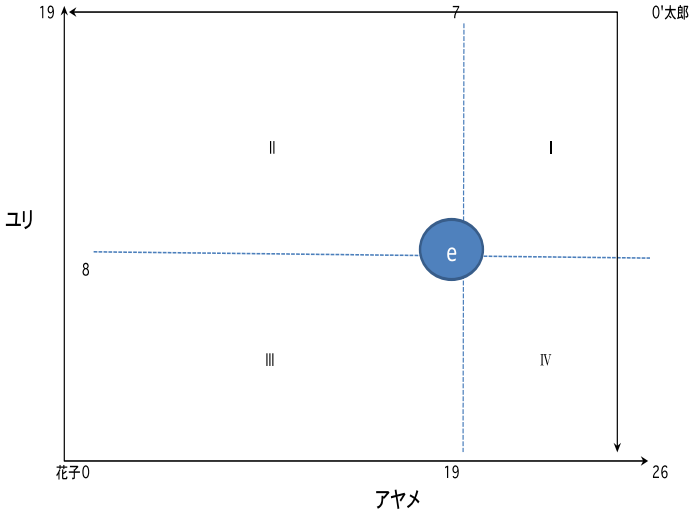
- 横軸はアヤメの総供給量（賦存量）
- 縦軸はユリの総供給量（賦存量）
- 初期配分点を通る無差別曲線

各人に最低のオフェリミテ

**Ophelimity**(集合的福利・厚生)を与える

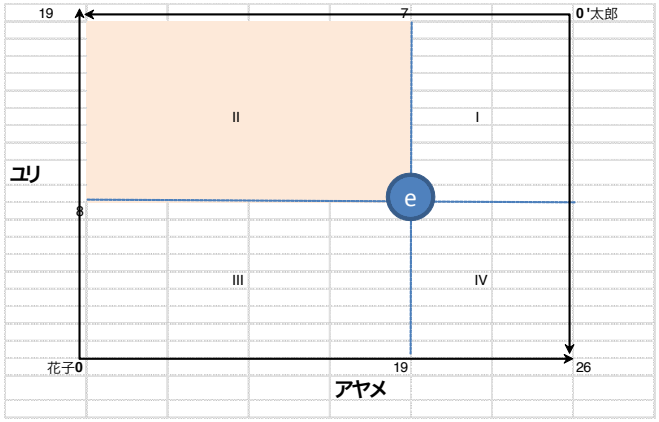
e点の変更⇒再配分による現状の改善

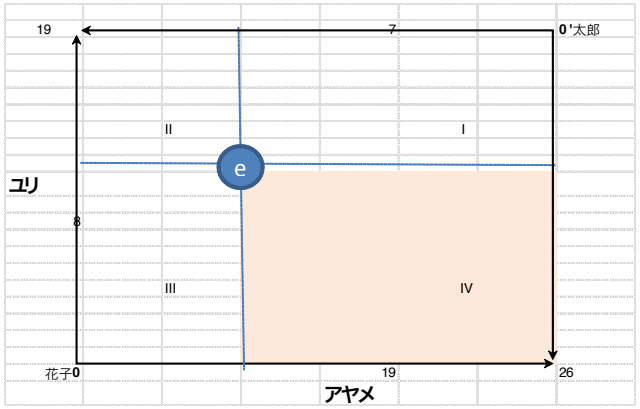
- 市場交換による再配分
- 提携交渉による再配分



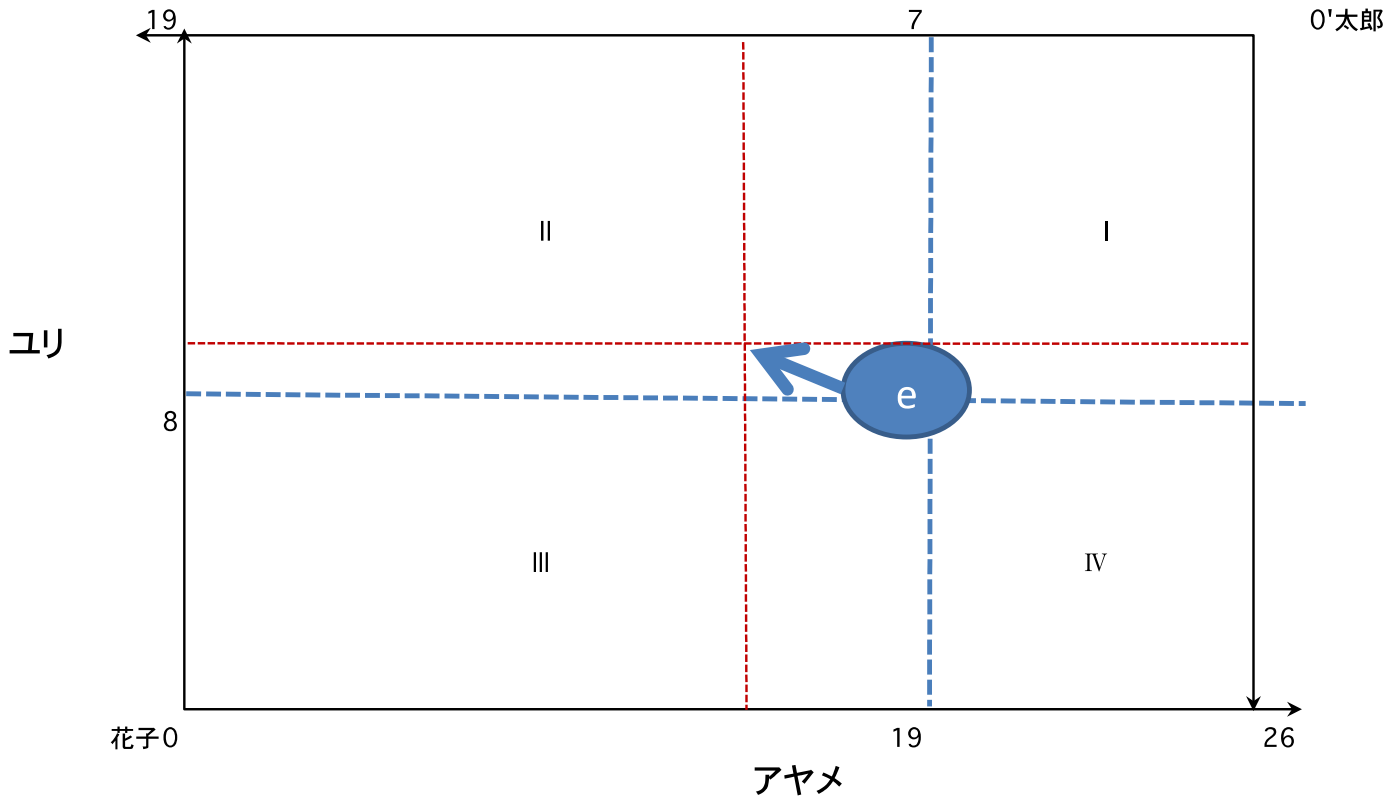
# 交換の内在的発生

- ✓ 正常的な場合　**有無相通**
  - 二人は相対的に多い財を供給し、少ない財を需要しようとする。
- ✓ **ケース１**
- ✓ 花子のバスケット: 相対的にアヤメがユリよりも多い。
- ✓ 太郎のバスケット: 相対的にユリがアヤメよりも多い。
- ✓ **ケース２**
- ✓ 花子のバスケット: 相対的にユリがアヤメよりも多い。
- ✓ 太郎のバスケット: 相対的にアヤメがユリよりも多い。



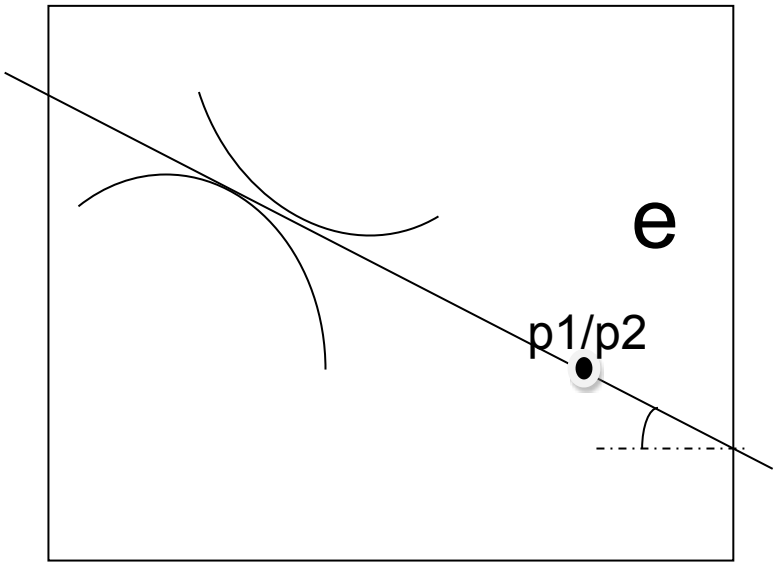
# 平等な分配



# 価格と予算

- アヤメの価格$p_1$
- アヤメ１本の価格あるいはアヤメの球根１グラムの価格
- ユリの価格$p_2$
- ユリ１本の価格あるいはユリの球根１グラムの価格
- 価格は財１単位を表す単位財（１本，１グラムなど）ごとに表示する。
- たとえば，アヤメの価格$p_1$＝0.5，ユリの価格$\mathbf{p_2=1}$と仮定する。
- ユリは基準財。
- 価格の導入によって，まず，初期賦存量の価値を会計上語ることができるようになる。
- 花子の予算
- $p_1 e^{花子}_1 + p_2 e^{花子}_2 = 0.5*19+1*8=17.5$
- 太郎の予算
- $p_1 e^{太郎}_1 + p_2 e^{太郎}_2 = 0.5*7+1*11=14.5$
- アヤメとユリの経済全体の供給の価値額合計
- $p_1 (e^{花子}_1 + e^{太郎}_1) + p_2 (e^{花子}_2 + e^{太郎}_2) = 17.5+14.5=32$

# 予算線は共通で1本である！




価格比$p_1/p_2$は市場から与えられる。

予算線の勾配は価格比。

よって、2人にとって予算線の勾配は共通。

一方、各人の予算線はかならず初期配分点**e**点を通る。

ゆえに、2人にとって予算線は共通で1本である。

# 太郎の最適消費計画

花子も太郎も「大きいことは良いことだ」（**more is betterという単調性の原則**）からは無差別曲線の北東方向にある消費財バスケット$(x_1, x_2)$を好む。

予算の制限があるとき、花子や太郎は各自の予算上で消費計画の選択を考える。

たとえば、太郎は

$p_1 x_1 + p_2 x_2 = p_1 e^{太郎}_1 + p_2 e^{太郎}_2 [= w^{太郎}]$

を満たすバスケット$(x_1, x_2)$を選択する。この式を予算線と呼ぶ。

太郎の予算線は、横軸を$x_1$, 縦軸を$x_1$にとれば、切片w/pと勾配$p_1/p_2$の直線。

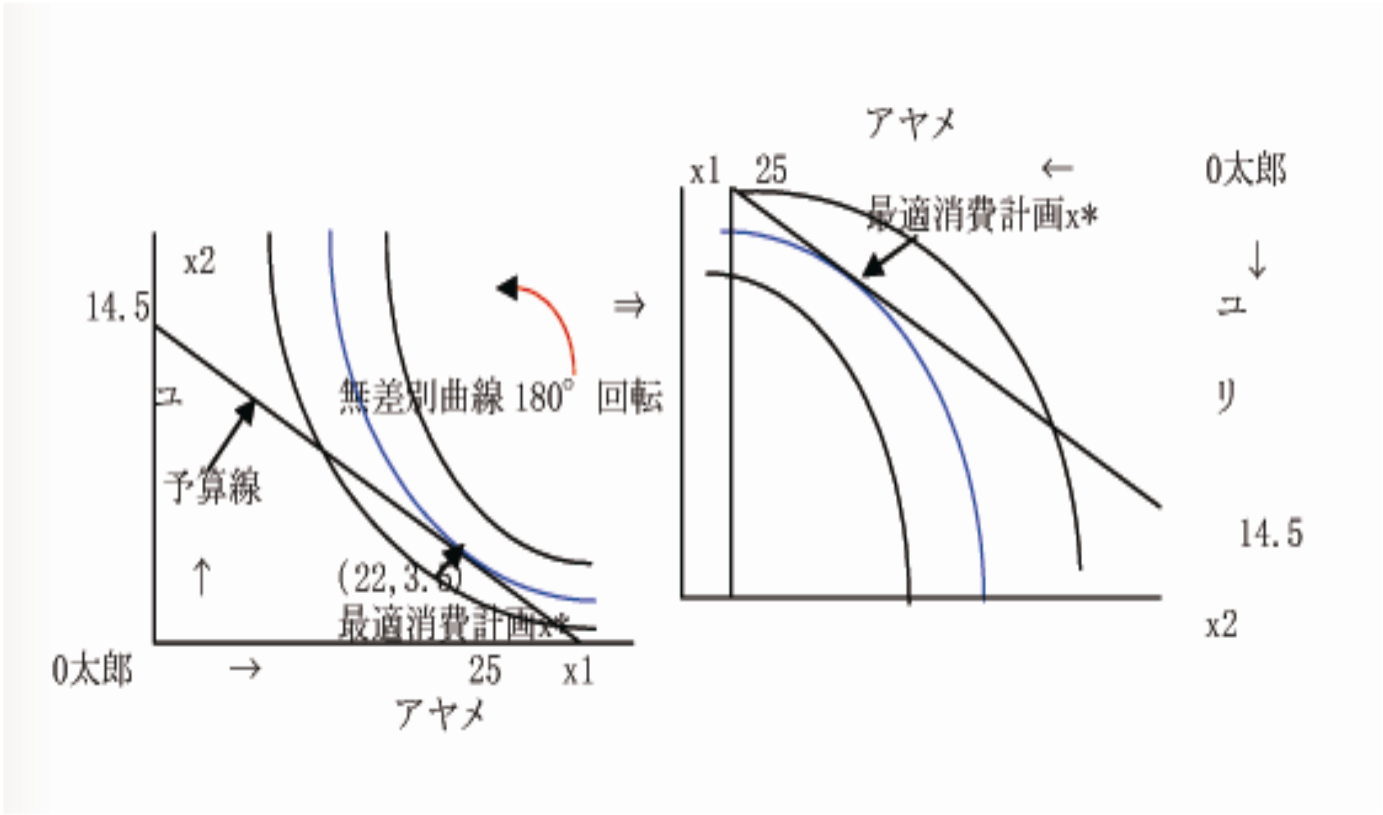
$$x_2 = (w/p_2) - (p_1/p_2)x_1$$

$p_1=0.5$, $p_2=1$, $w=14.5$

$$x_2 = 14.5 - 0.5\, x_1$$

こうして予算の制限のもとで、最大の効用水準を確保できる消費財バスケットの選択することを「最適消費計画」を求める、と言う。

# 太郎の効用最大化


x2
14.5
ユ
予算線
↑
0太郎
→
無差別曲線 180° 回転
⇒
(22,3.6)
最適消費計画x*
25
x1
アヤメ
アヤメ
x1 25
←
最適消費計画x*
0太郎
↓
ユ
リ
14.5
x2

# 最適消費計画必要条件

最適消費計画では，アヤメにたいするユリの限界代替率（第2章「強凸選好と限界代替率逓減」参照）はちょうど所与の価格比$p_1/p_2$ に等しい。

太郎の最適消費計画x*は(22, 3.5) になっている。

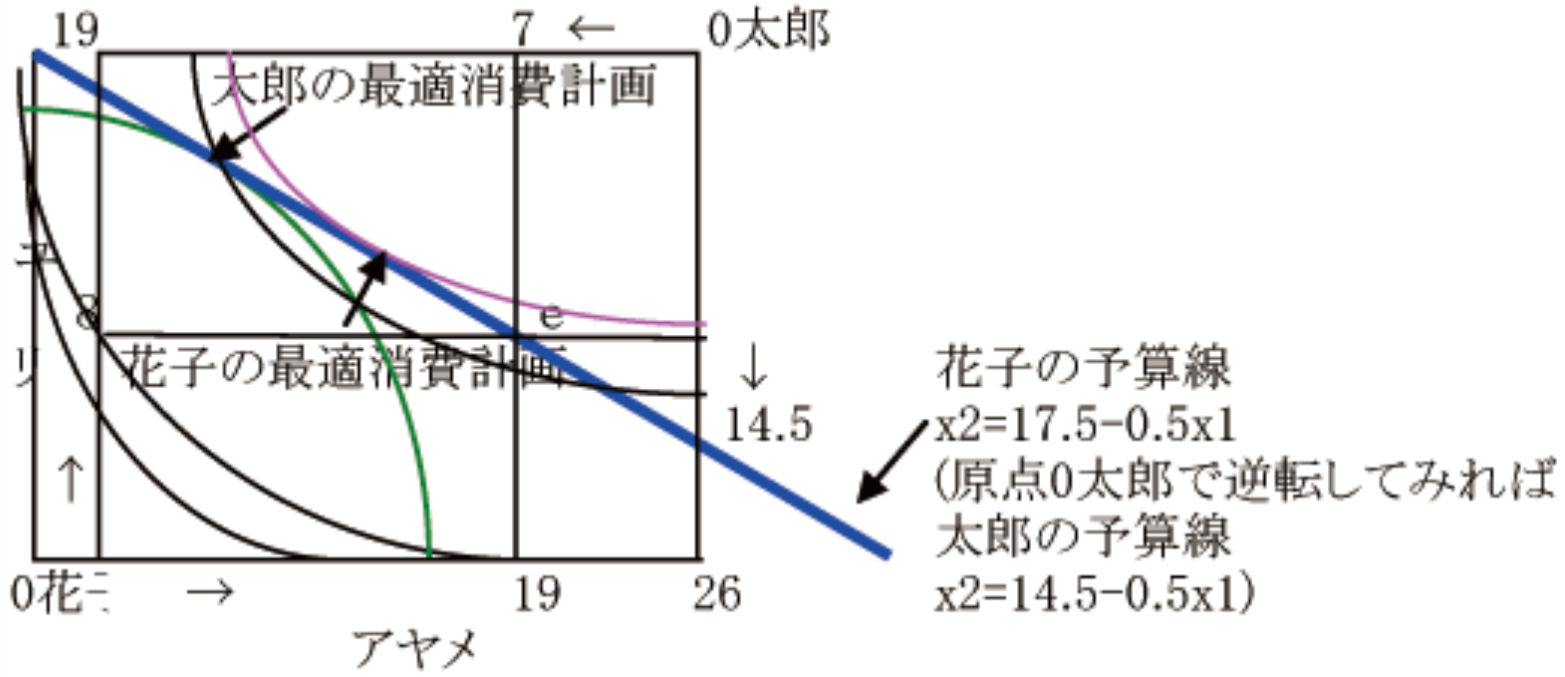
これらの具体的な数値は無差別曲線の図形の形状から決定される。

$$|\Delta x_2/\Delta x_1| = p_1/p_2$$

太郎の最適消費計画x*は(22, 3.5) になっている。

これらの具体的な数値は無差別曲線の図形の形状から決定される。

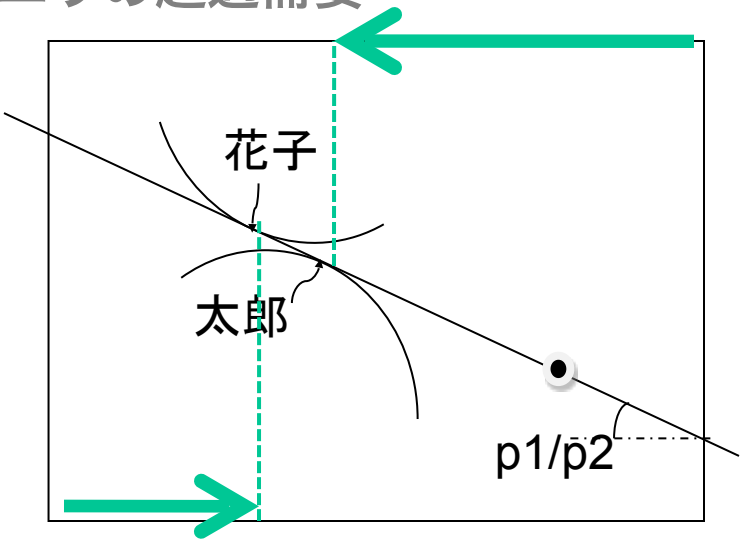
# 花子と太郎の効用最大化



# 超過需要と超過供給

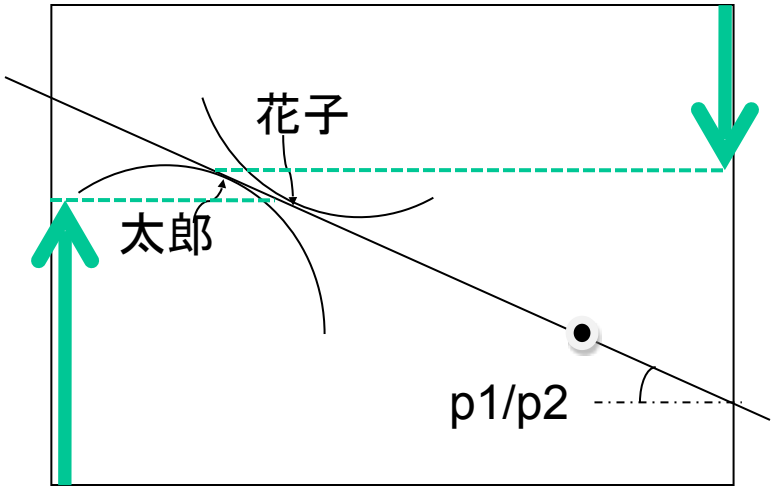
**アヤメの超過供給**

**ユリの超過需要**

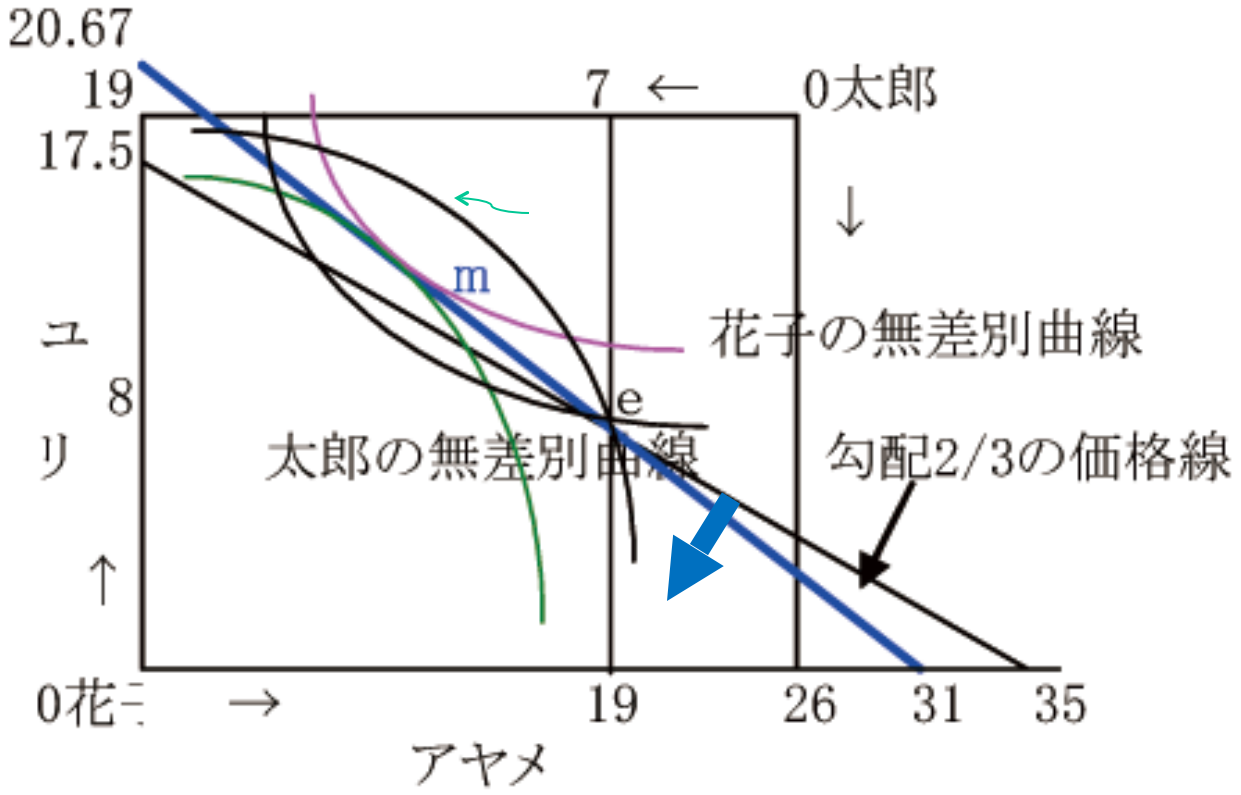



**アヤメの超過需要**

**ユリの超過供給**



# 市場均衡mの達成


20.67
19
17.5
ユ
8
リ
↑
0花
→
7 ←
0太郎
↓
m
花子の無差別曲線
e
太郎の無差別曲線
勾配2/3の価格線
19
26
31
35
アヤメ

# 分離定理

**市場均衡配分の点m**で、初期賦存量の点**e**を通る価格線（予算線）が「花子が**m**より選好する配分の集合」と「太郎が**m**より選好する配分の集合」に完全に分離する。

点eを軸に予算線を左右に回転する。

軸を点**e**に固定した予算線の回転により花子と太郎の無差別曲線をきれいに切り分ける点**m**は市場均衡点である。

# 需要と供給

アヤメとユリの供給[初期賦存 総需要と総供給量]**e**

$e^{花子} = (e^{花子}_1, e^{花子}_2) = (19, 8)$

$e^{太郎} = (e^{太郎}_1, e^{太郎}_2) = (7, 11)$

アヤメとユリの需要**x**

$x^{花子} = (x^{花子}_1, x^{花子}_2) = (12, 11.5)$

$x^{太郎} = (x^{太郎}_1, x^{太郎}_2) = (22, 3.5)$

$$x = (x^{花子}_1 + x^{太郎}_1, x^{花子}_2 + x^{太郎}_2) = (x_1, x_2) = (34, 15)$$

$$e = (e^{花子}_1 + e^{太郎}_1, e^{花子}_2 + e^{太郎}_2) = (e_1, e_2) = (26, 19)$$

アヤメは超過需要：アヤメの需要$\mathbf{x}_1$は34で，アヤメの供給$\mathbf{e}_1 = 26$をはるかに超過している。

# ワルラス法則

花子や太郎は予算にしたがって需要を計画するので、花子と太郎の需要額の合計額$p_1x_1+p_2x_2$はつねに初期賦存量の価値の合計に一致している。

$$\mathbf{p}_1\mathbf{x}_1+\mathbf{p}_2\mathbf{x}_2\equiv\mathbf{p}_1\mathbf{e}_1+\mathbf{p}_2\mathbf{e}_2$$

需要を価格で評価したもの≡供給を価格で評価したもの

この恒等式はワルラス**Léon Warlas(1834-1910)**が発見したことから「**ワルラス法則**」と呼ばれる。

実際，われわれの数値設定は

$$\mathbf{p}_1\mathbf{x}_1+\mathbf{p}_2\mathbf{x}_2=\mathbf{p}_1\mathbf{e}_1+\mathbf{p}_2\mathbf{e}_2$$

0.5*34+1*15=0.5*26+1*19=**32**

でワルラス法則を満たしたものであることがわかる。

# 市場均衡とワルラス模索過程

アヤメに超過需要があるのはアヤメの価格が相対的に低いから。

ユリに超過供給があるのはユリの価格が相対的に高いから。

そこで、アヤメの価格$\mathbf{p}_1$を引き上げてみる。

ユリの価格は1に規準化する。$p_2=1$、

よって$p_1/p_2=p_1$

$p_1$の上昇はつねに$p_2$が相対的に下落することを意味する。

ワルラス模索過程では$p_1$の上昇は通常微小量。これは財の個数が多いときすぐに需給均衡を与える解を見つけるのが困難であるから。

微小変化をつうじて何度も価格変更のステップを重ねながら少しずつ全財の超過需要が抑制されていくことを確認していかねばならない。

**2**人**2**財の単純な交換経済では無差別曲線の形状だけから均衡を見出すことは容易な作業。したがって手間を省いて1回の価格変更を与えるだけで、均衡解の達成を確認することができる。

# 市場均衡

ワルラス法則の変形

$\mathbf{p_1x_1 + p_2x_2 \equiv p_1e_1 + p_2e_2}$

$\mathbf{p_1(x_1 - e_1) + p_2(x_2 - e_2) \equiv 0}$

アヤメの超過需要額＋ユリの超過供給額≡ **0**

**2**財しかない経済ではアヤメが超過需要なら残りの財は超過供給（負の超過需要）

ワルラス法則は超過需要が非ゼロであっても成り立つ。つまり、市場均衡でない状態でつねに成り立つ。

市場均衡は、超過需要が各財ですべてゼロである状態である。

アヤメの超過需要ゼロ

ユリの超過需要ゼロ

# 数値例の市場均衡(1)

最初の手合わせ

$x^{花子} = (x^{花子}_1, x^{花子}_2) = (12, 11.5)$

$x^{太郎} = (x^{太郎}_1, x^{太郎}_2) = (22, 3.5)$

アヤメの価格変更を**0.5**から**2/3**とする。これによって花子も太郎もアヤメの需要を減らすべき。

花子は初期賦存量の構成からアヤメを相対的に多く所有していた。

アヤメの価格上昇により**実質所得の上昇の利得**を得る。

その結果、アヤメを減らしたとしてもそれほど大量に減らす必要はない。

太郎は初期賦存量の構成からユリを相対的に多く所有していた。

アヤメの価格上昇によるユリの相対価格下落により**実質所得の低落の損失**が高まる。

その結果、花子と比較して、アヤメの価格上昇にたいしてアヤメを減らす率は大きくなる。

これらを考慮して新価格$p_1 = 2/3$,

$p_2 = 1$の下で、

花子の最適消費計画x*花子＝(10, 14)

太郎の最適消費計画x*太郎＝(16, 5)

# 市場均衡の交換比率(2)

もっとも重要な点は花子と太郎が財の交換の場である「市場」にたいして、各人がどのようなオファーをしているかということ。

花子はアヤメを10しか需要しないので手持ちの19から10を差し引いた9だけアヤメを市場に供給する。

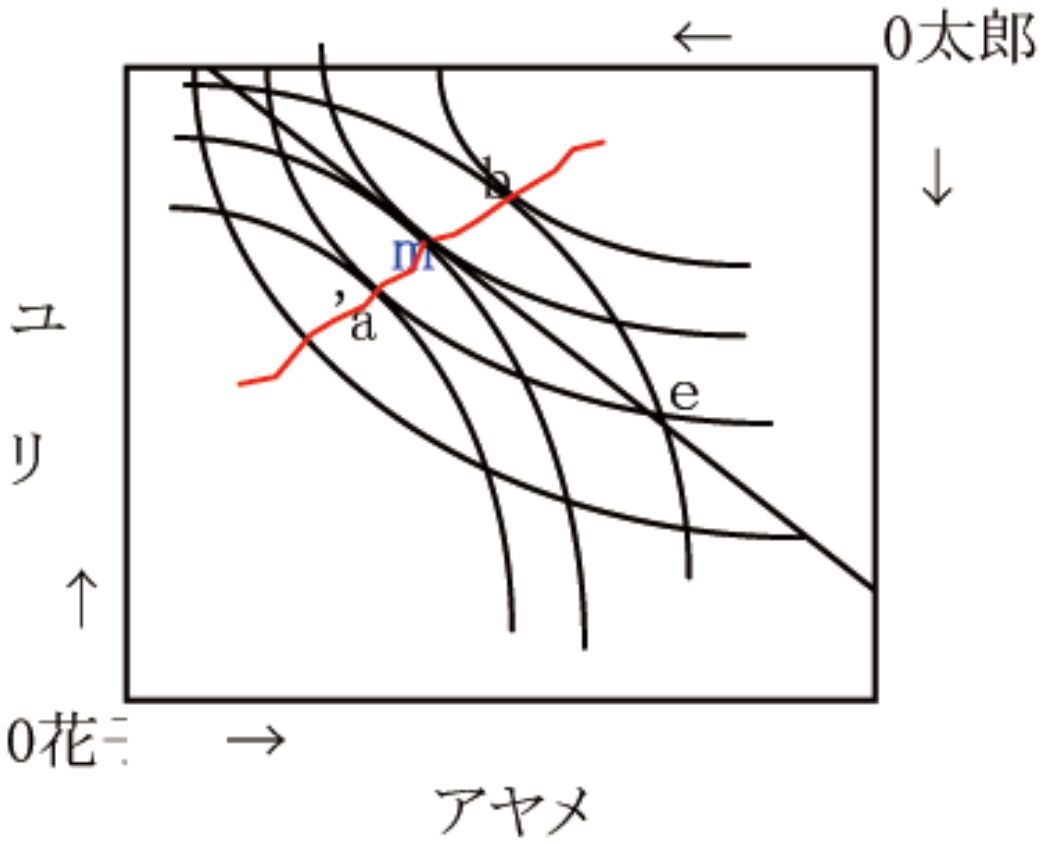
$z^{花子}_1 = x_1 - e_1 = 10 - 19 = -9$

ユリについては14需要するので手持ちの8を上回る6の需要を市場に表明する。

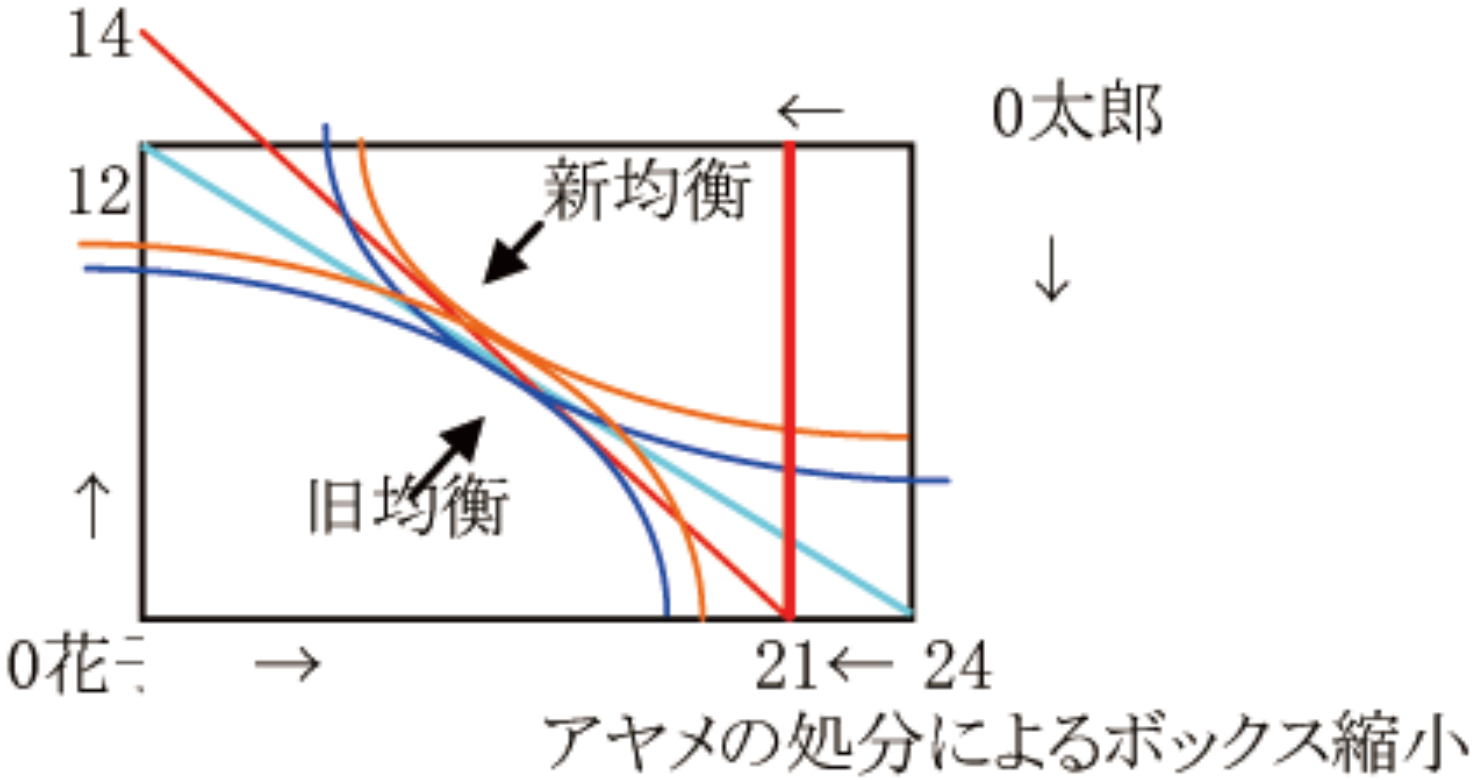
$z^{花子}_2 = x_2 - e_2 = 14 - 8 = 6$

このとき、花子は市場でアヤメ9との交換にユリ6を獲得することを申し出たことになる。同様にして、太郎はユリ6との交換にアヤメ9を獲得することを申し出たことになる。

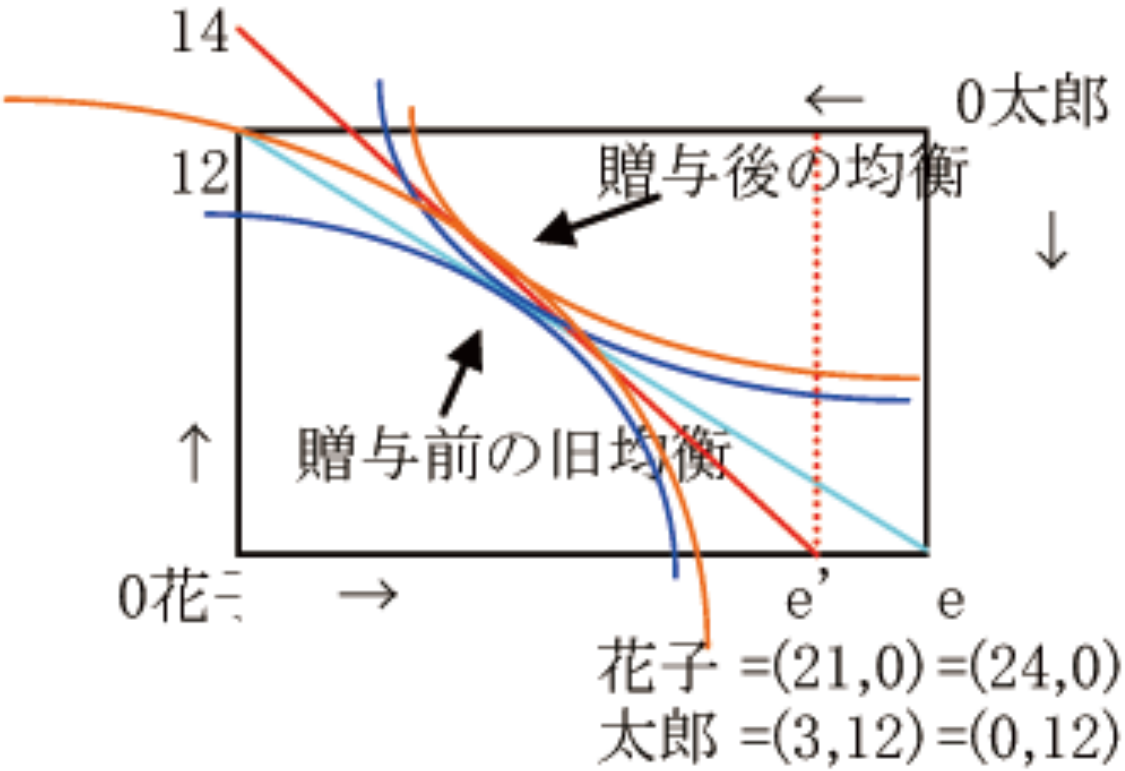
# パレート最適と契約曲線



# 市場均衡にたいする反例：
# 財廃棄後の均衡



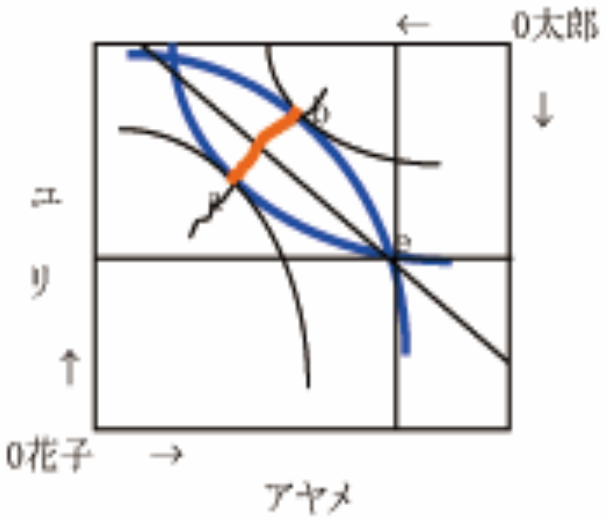
# 市場均衡にたいする反例：
# 贈与後の均衡



# コア配分

いかなる提携によってももはや改善できない配分の集合→**レンズ領域内の契約曲線**

交換経済のコアは提携によって改善できる配分をすべて除いた集合。

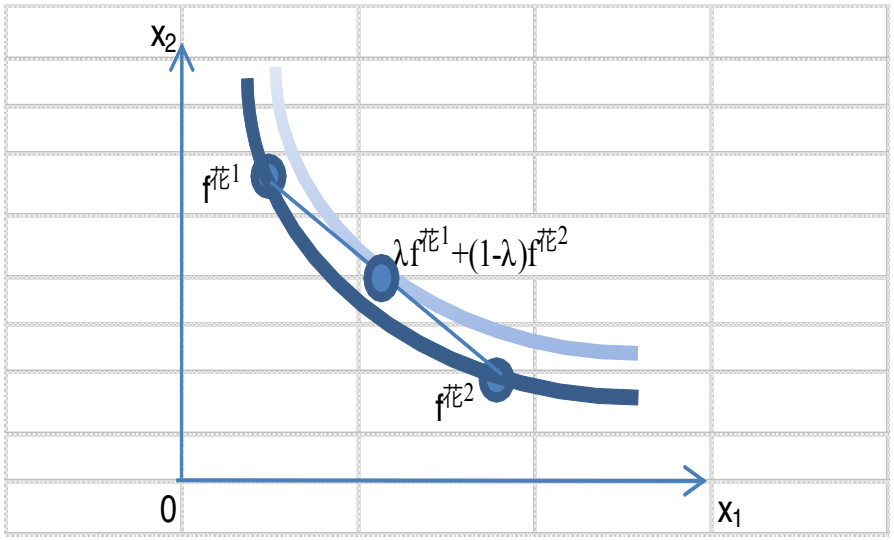


# 双子の経済：4人経済

- 初期賦存量$e^i$＝（$e^i_1$, $e^i_2$）
  - $e^{花子}$＝（$e^{花子1}$, $e^{花子2}$）＝ $e^{花子1}$ ＝ $e^{花子2}$
  - $e^{太郎}$＝（$e^{太郎1}$ , $e^{太郎2}$ ）＝ $e^{太郎1}$ ＝ $e^{太郎2}$
- 財の配分$f^i$＝（$x^i_1$, $x^i_2$ ）
  - $f^{花子1}$＝（$x^{花子1}_1$ , $x^{花子1}_2$）
  - $f^{花子2}$＝（$x^{花子2}_1$ , $x^{花子2}_2$ ）
  - $f^{太郎1}$＝（$x^{太郎1}_1$ , $x^{太郎1}_2$ ）
  - $f^{太郎2}$＝（$x^{太郎2}_1$ , $x^{太郎2}_2$ ）
- **4人経済の配分の実行可能条件**
  - $x^{花子1}_1 + x^{花子2}_1 + x^{太郎1}_1 + x^{太郎2}_1 = e^{花子1}_1 + e^{花子2}_1 + e^{太郎1}_1 + e^{太郎2}_1$
  - $x^{花子1}_2 + x^{花子2}_2 + x^{太郎1}_2 + x^{太郎2}_2 = e^{花子1}_2 + e^{花子2}_2 + e^{太郎1}_2 + e^{太郎2}_2$
- すなわち、要約して書けば、
  - $(f^{花子1} + f^{花子2}) + (f^{太郎1} + f^{太郎2}) = 2e^{花子} + 2e^{太郎}$

# 不平等配分(I)とコア

- 双子の経済で、同じ無差別曲線上にあって異なる配分⇒混合により、より良い配分ができる。よって、**コア**でない。




- $f^{花子1} \neq f^{花子2}$, $f^{花子1} \sim f^{花子2}$

# 不平等配分(II)とコア

不平等配分の想定(II)

- $f^{花子1} < f^{花子2}$ , $f^{太郎1} \lesssim f^{太郎2}$

花子1と太郎1は提携すれば、**新しい配分$f'^{花子1}$と$f'^{太郎1}$**を主張できるか？

- $f^{花子1} < \underline{0.5\, f^{花子1} + 0.5\, f^{花子2}}$ [= **$f'^{花子1}$**]
- $f^{太郎1} < \underline{0.5\, f^{太郎1} + 0.5\, f^{太郎2}}$ [= **$f'^{太郎1}$**]

- **YES**

- $(f^{花子1} + f^{花子2}) + (f^{太郎1} + f^{太郎2}) = 2e^{花子} + 2\, e^{太郎}$

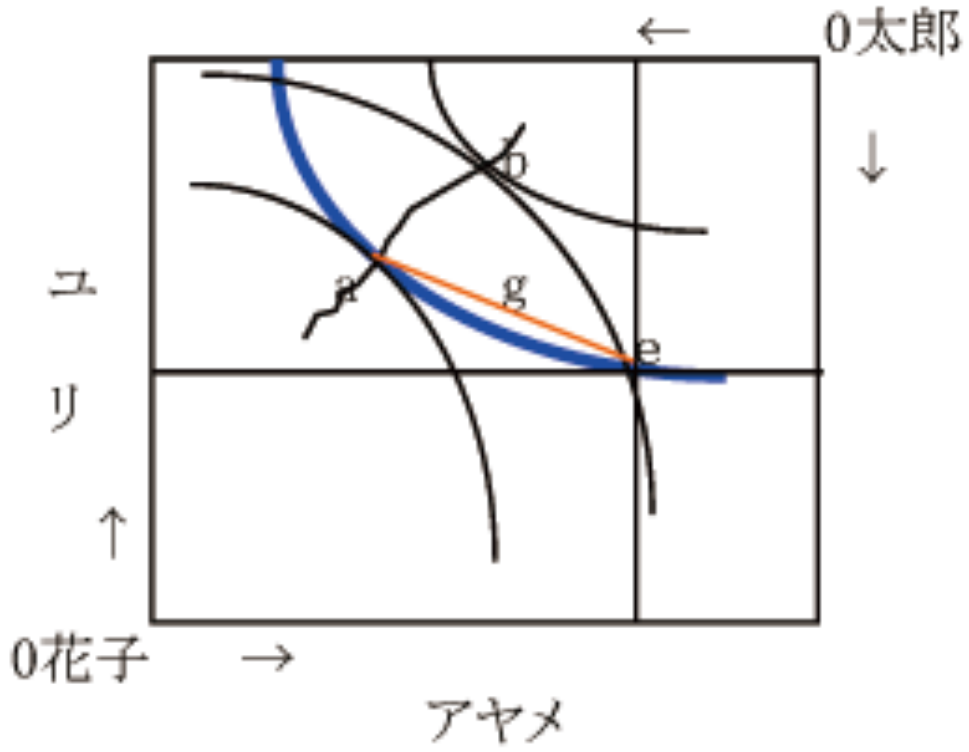
の両辺を2で除せば、

- $(\underline{0.5f^{花子1} + 0.5f^{花子2}}) + (\underline{0.5f^{太郎1} + 0.5f^{太郎2}}) = e^{花子} + e^{太郎}$

これは4人経済の配分の実行可能条件にほかならない。

ゆえに**新しい配分**は実現可能。よって、不平等配分(II)は**コアではない。**

# 3人による提携



# 極限定理

**ある配分は所与の経済で競争的である（市場均衡）⇔　その配分が所与の経済の*n*倍の複製すべてにおいてコア領域にとどまる。**

2人経済から始めて複製する過程で除去されずに残った**コア配分**は、2人経済にもともと存在していたコア配分。

市場によらず、交渉と提携による配分の改善も、参加する経済主体が増大すると、次第に競争的配分（市場均衡）に近づく。

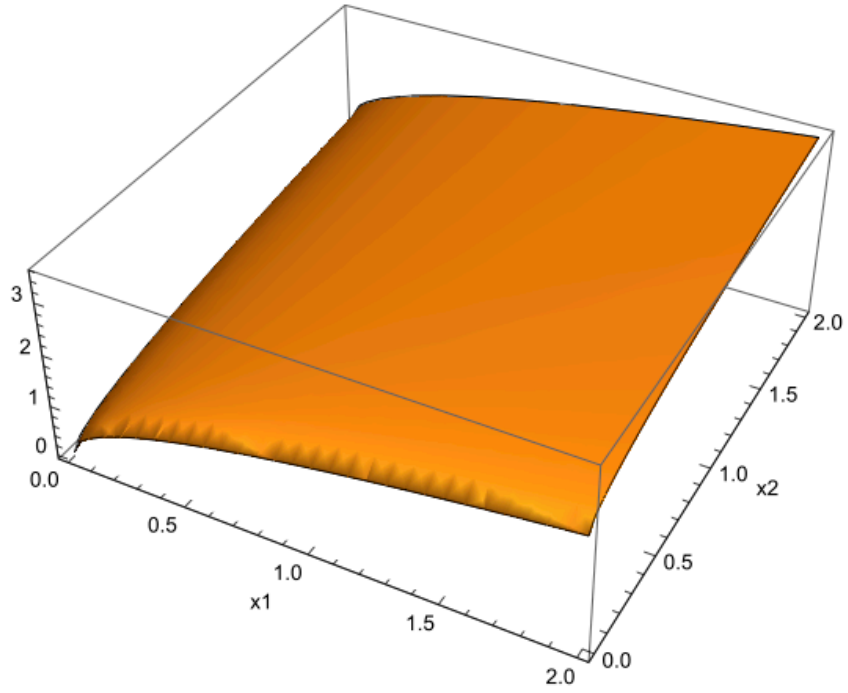
極限において、「エッジワースによる提携による改善⇔ワルラスの分権的財配分」が成立。

# Utility function and Indifference curves

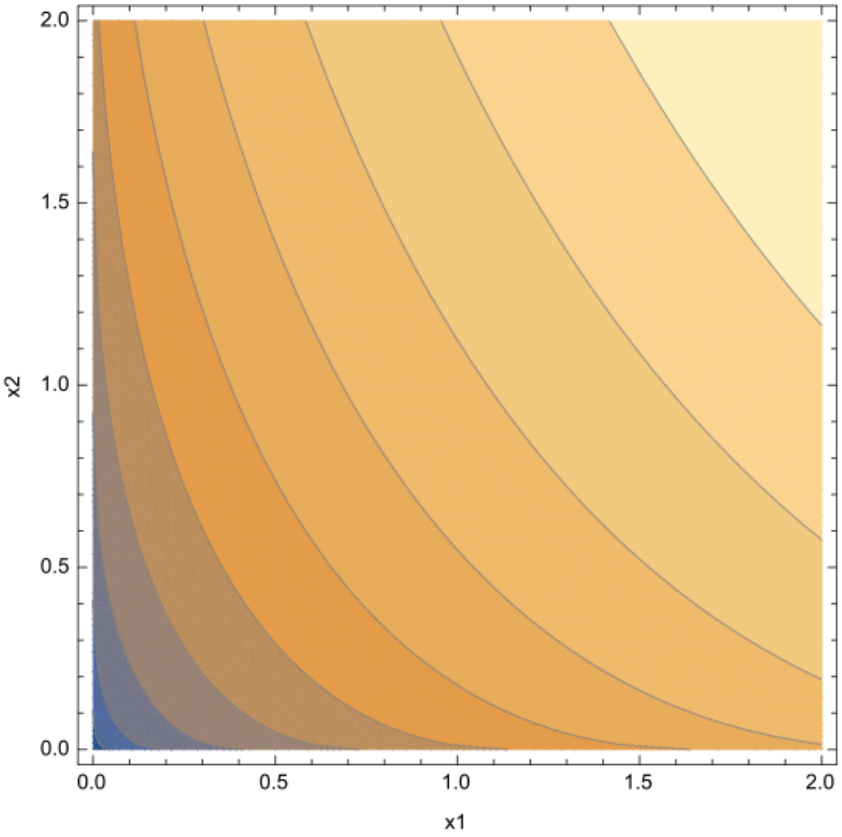
## Agent A

$u_A = 1.5\, x_1^{0.5} + x_2^{0.5}$

**3D**




**2D**

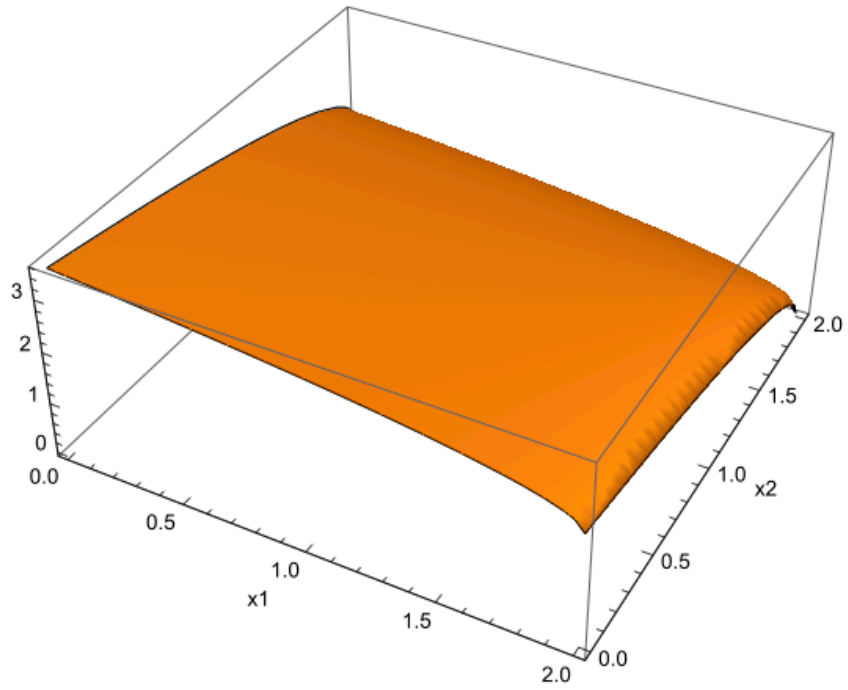


# Utility function and Indifference curves

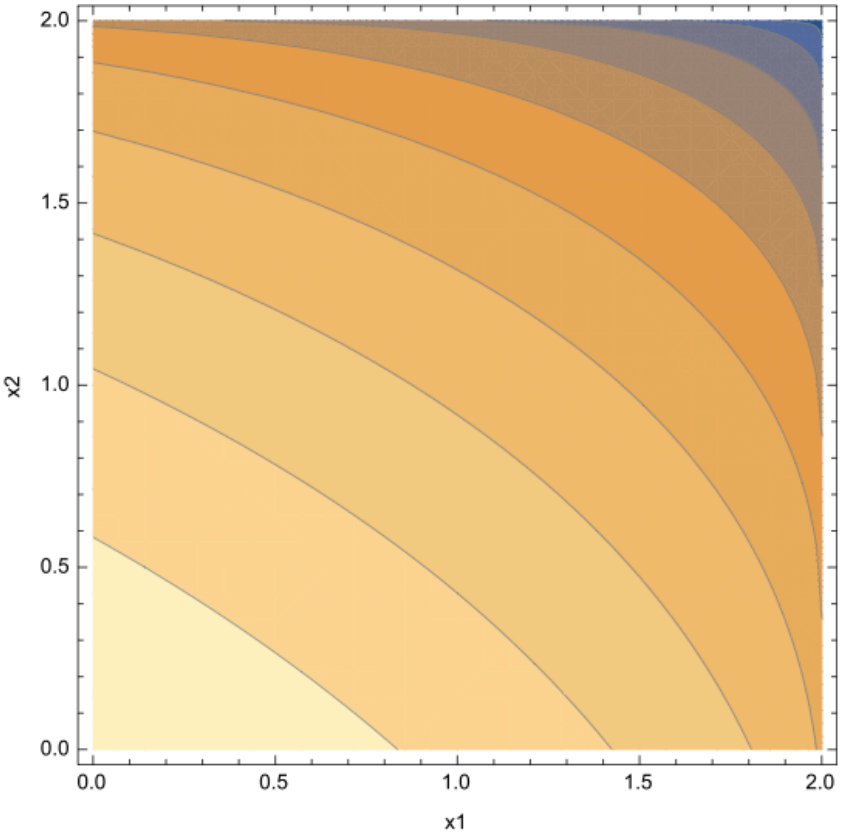
## Agent B

$u_B=(2- x_1)^{0.5} +1.5(2-x_2)^{0.5}$

**3D**

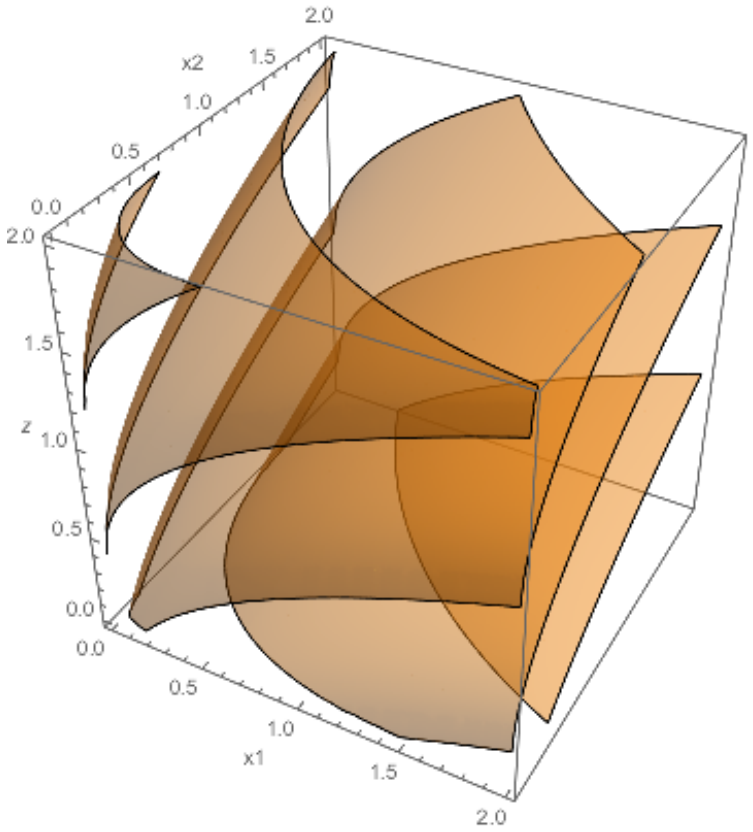



**2D**

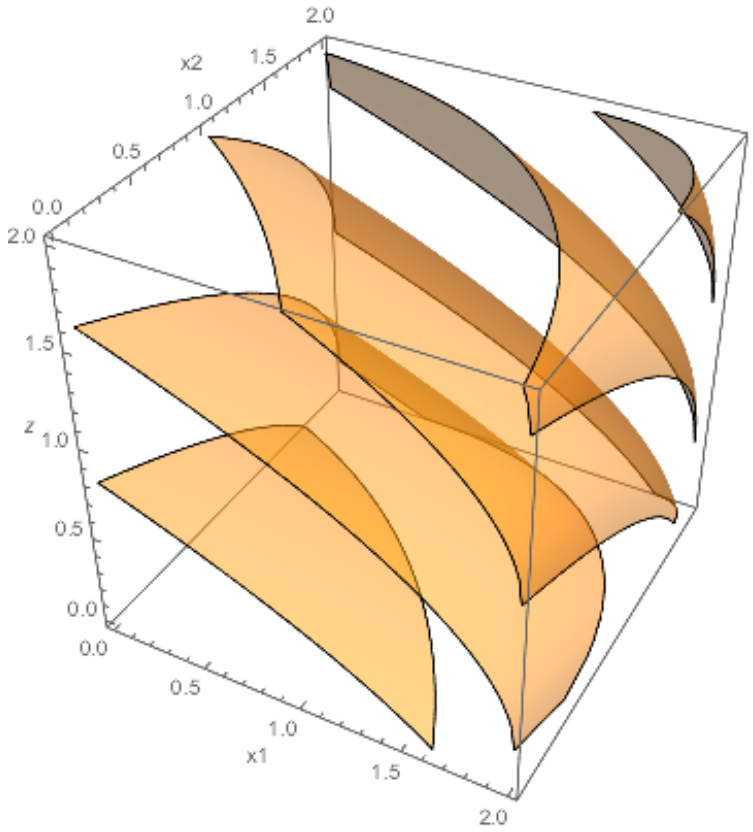


# Contours 3D

**Agent A**

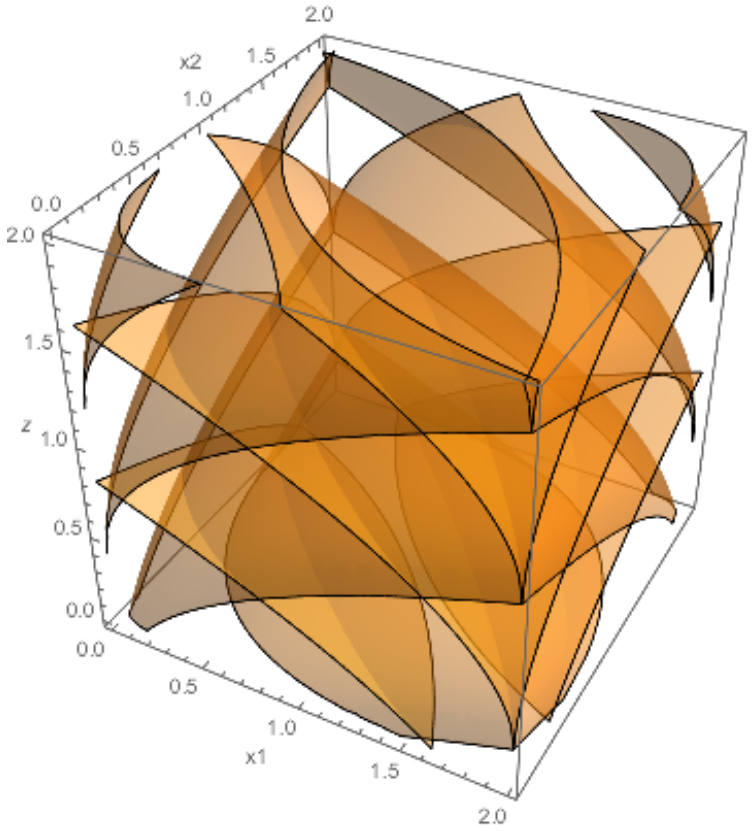



**Agent B**

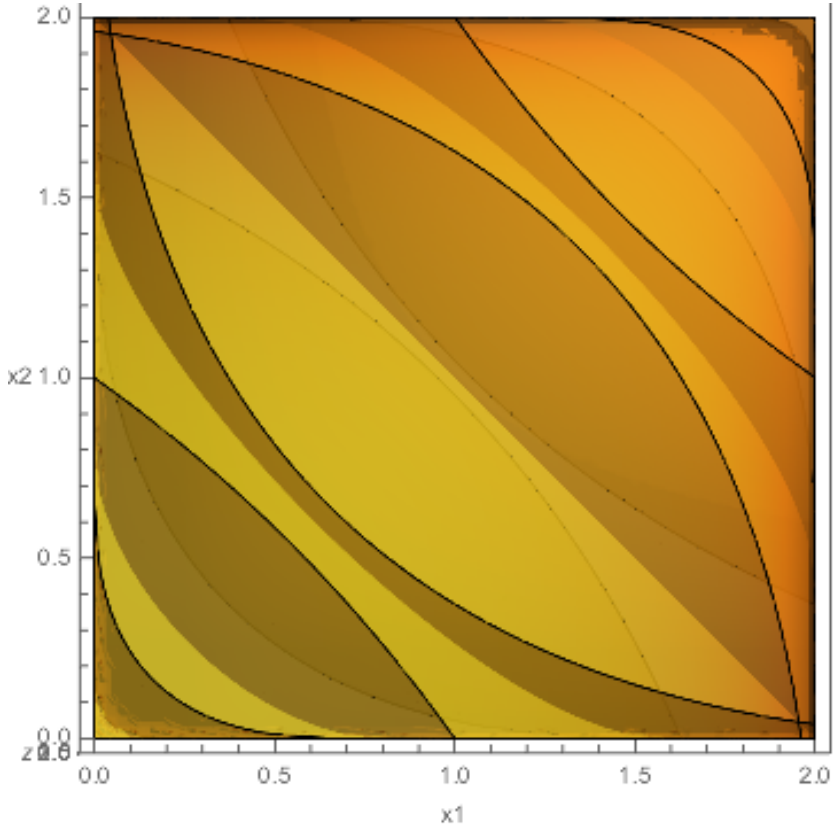


# Exchange box 3D

**Integration A and B**

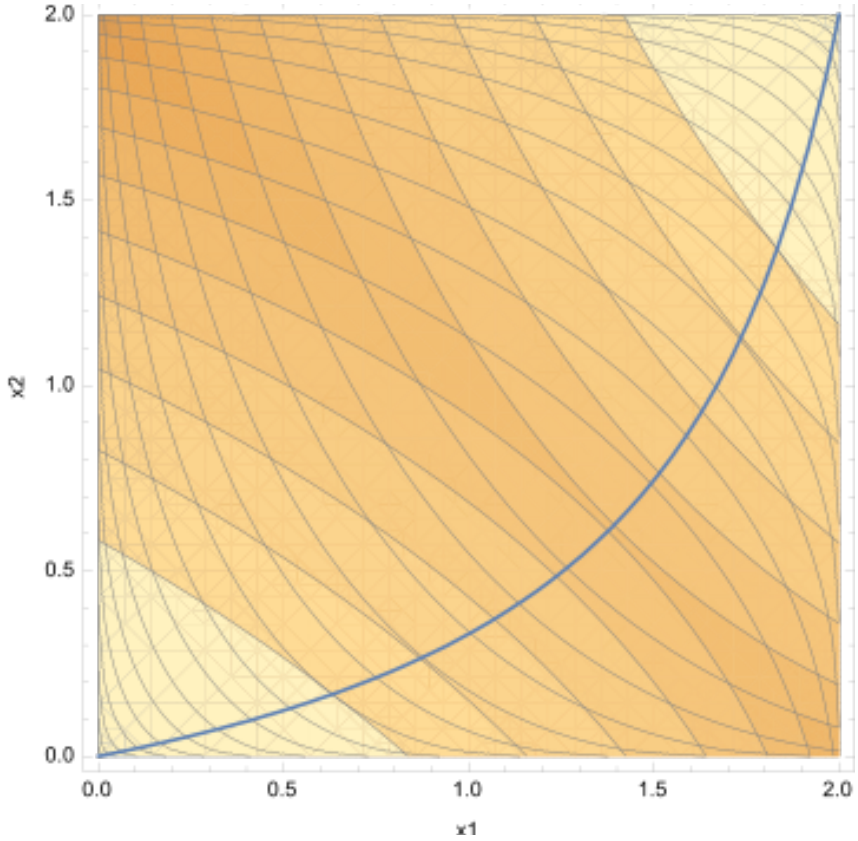



**Bottom diagram of 3D**

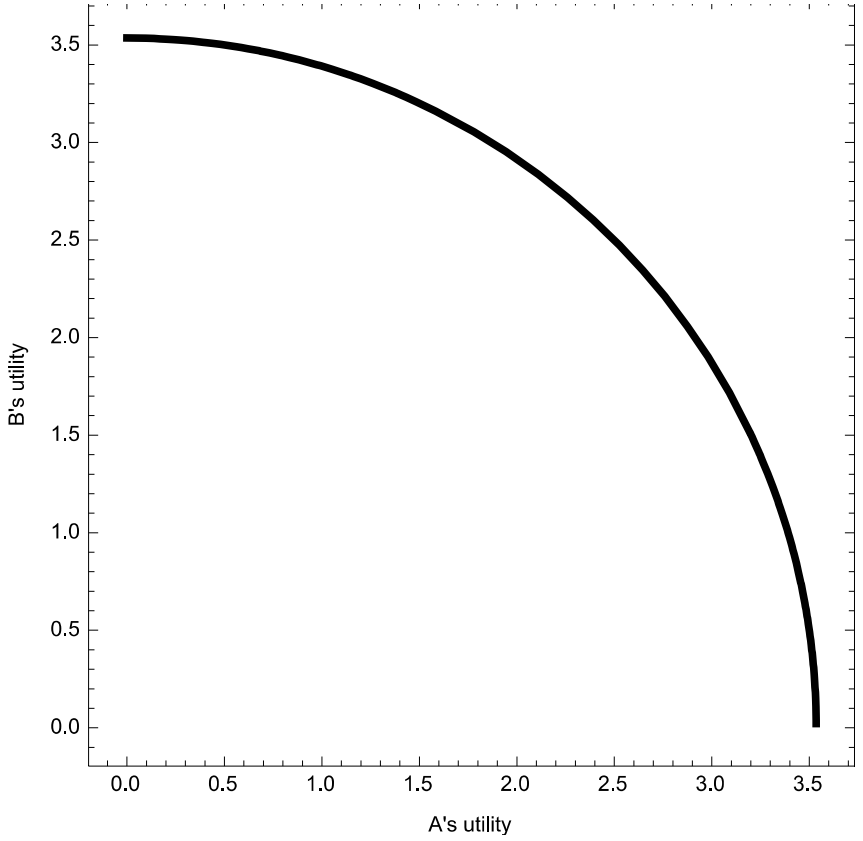


# Contract curve 2D

## Indifference Curves




## Utility plane



# Derivation of the contract curve

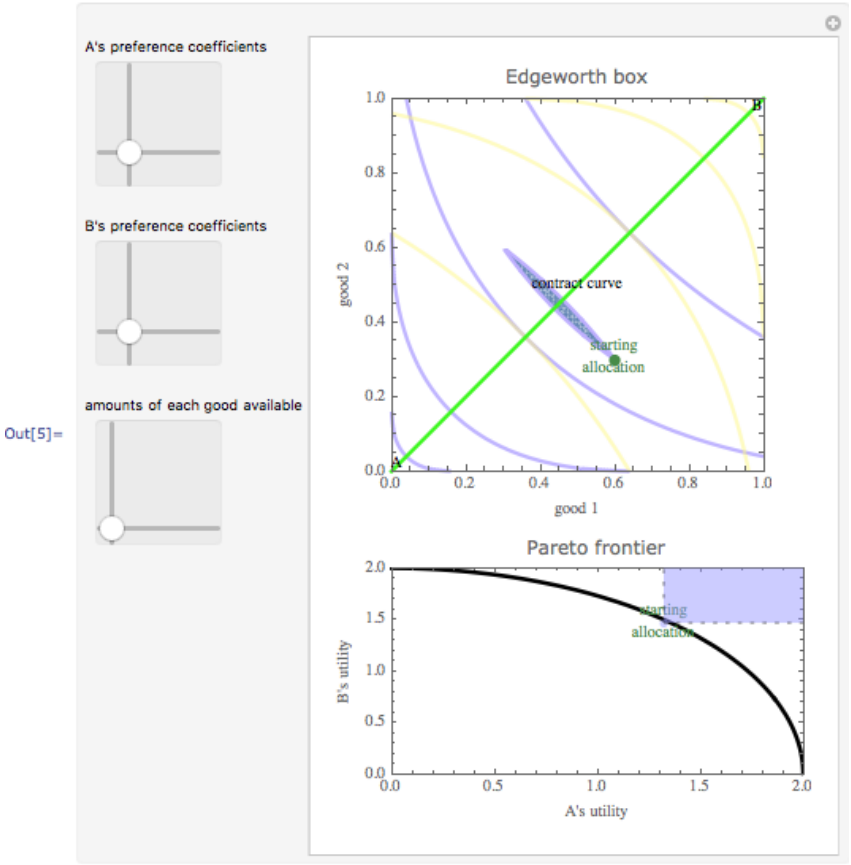
$$\text{Agent } A: \frac{dx_2}{dx_1} = \frac{u_{Ax_1}}{u_{Ax_2}} = \frac{\frac{\partial\left(1.5\sqrt{x_1}+\sqrt{x_2}\right)}{\partial x_1}}{\frac{\partial\left(1.5\sqrt{x_1}+\sqrt{x_2}\right)}{\partial x_2}} = \frac{1.5\sqrt{x_2}}{\sqrt{x_1}}$$

$$\text{Agent } B: \frac{dx_2}{dx_1} = \frac{u_{Bx_1}}{u_{Bx_2}} = \frac{\frac{\partial\left(\sqrt{2-x_1}+1.5\sqrt{2-x_2}\right)}{\partial x_1}}{\frac{\partial\left(\sqrt{2-x_1}+1.5\sqrt{2-x_2}\right)}{\partial x_2}} = \frac{0.67\sqrt{2-x_2}}{\sqrt{2-x_1}}$$

$$\text{Solve } \frac{1.5\sqrt{x_2}}{\sqrt{x_1}} = \frac{0.67\sqrt{2-x_2}}{\sqrt{2-x_1}} \text{ with respect to } x_2$$

$$\text{Contract curve}: x_2 \to -\frac{32\,x_1}{65\,x_1 - 162}$$

"The Edgeworth Box" from the Wolfram Demonstrations Project
http://demonstrations.wolfram.com/TheEdgeworthBox/
Contributed by: Seth J. Chandler



# 費用最小化　教科書第8章

# 短期と長期の生産

**生産要素：**

労働$x_1$と固定設備$x_2$を投入する。

**要素価格：**

労働の単位価格は$w_1$（賃金）、固定設備の単位価格は $w_2$。

**企業の生産：**

要素価格$w_1$ , $w_2$ をデータとして、生産要素$x_1$, $x_2$を投入し、産出yを生産する。

**生産関数： $y \leqq f(x_1, x_2)$[少なくともy以上生産する]**

**短期の生産：固定設備の量$x_2$**を不変として費用最小化する**$x_1$**を求める。 **[$x_2$=const.]**

**制約式の個数**は**$y \leqq f(x_1, x_2)$と$x_2$=const.の2個必要である。**

**長期の生産：** どの要素投入にかんしても制限的な要素はなく、**費用最小化の観点**から自由に要素投入量を調整できるような生産。

**制約式の個数**は**$y \leqq f(x_1, x_2)$の1個のみ。**

# 長期費用の最小化問題

**制約式は生産関数：** $f(x_1, x_2) \geqq y$のみ。

**費用：** $w_1 x_1 + w_2 x_2$

生産要素$x_2$が固定設備。しかし、「長期の生産」では、固定設備も他の要素投入と同様に制約なしに調節するので、費用最小化は$x_1, x_2$の同時調節に係わっている。

**長期費用最小化問題**

**Min $w_1 x_1 + w_2 x_2$ subject to $f(x_1, x_2) \geqq y$**

**長期費用最小化問題のラグランジュ関数**

$L(x_1, x_2, \lambda) = w_1 x_1 + w_2 x_2 - \lambda\{f(x_1, x_2) - y\}$

**ラグランジュ未定乗数法**により、最適解$x_1, x_2$を求めて$w_1 x_1 + w_2 x_2$ に代入すれば，**長期の費用関数$C(x_1, x_2, y)$**を得る。

# 最小値関数C(y)

産出**y**にかんして、最小費用を与える要素投入の組($\mathbf{x^*_1}$, $\mathbf{x^*_2}$)が連続的に対応する。このとき、

$\mathbf{x^*_1=\psi_1(y)}$ , $\mathbf{x^*_2=\psi_2(y)}$

$\psi_i$はかならずしも一意的な関数関係である必要はない。

**陰関数定理**が**関数ψの存在**を保証する。

長期費用関数は究極的に産出yの関数になる：

$\mathbf{C(x^*_1, x^*_2, y) = C(\psi_1(y), \psi_2(y), y) = C(y)}$

**費用関数C(y)** はyの値ごとに**最小値の費用**を定めるので**最小値関数**と呼ぶ。**制約式が1個**の場合[制約式は$f(x_1, x_2) \geqq$yの1個]であることを強調する場合，最小値関数を次のように書く。

$\mathbf{C^1(y)}$

# 包絡線定理

**包絡線：**envelop

→各曲線を包み込んでいく

yの最小値関数をC(y)とする。

制約関数$f(x_1, x_2) \geqq y$は準凹関数で連続的に微分可能である。

制約式の個数がn個の最小値関数は$C^n$

制約式がn－1個の最小値関数は$C^{n-1}$

$C^n(y)=C^{n-1}(y)$

$dC^n(y)/dy=dC^{n-1}(y)/dy$

$d^2C^n(y)/dy^2>d^2C^{n-1}(y)/dy^2$

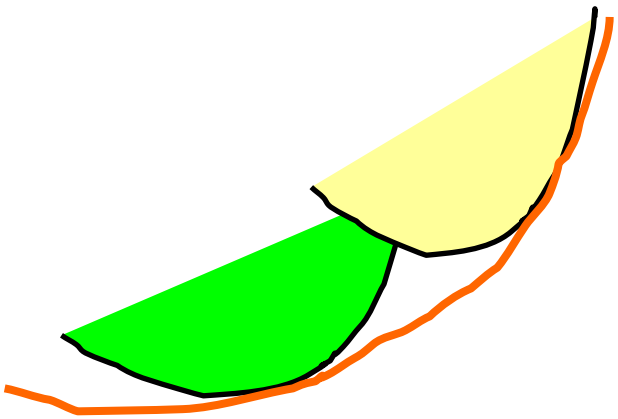
最大値関数のとき、 $d^2C^n(y)/dy^2<d^2C^{n-1}(y)/dy^2$

を満たすyが存在する。

# 包絡線

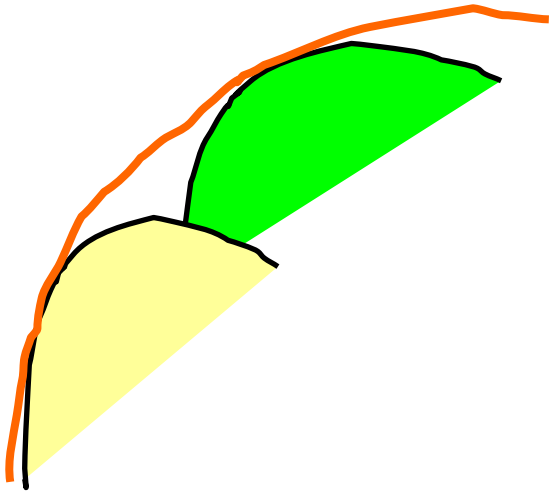
## 最小値関数

$d^2C^n(y)/dy^2 > d^2C^{n-1}(y)/dy^2$



## 最大値関数

$d^2C^n(y)/dy^2 < d^2C^{n-1}(y)/dy^2$



# 包絡線上の短期費用曲線

制約式の個数が1個少ない曲線（長期費用曲線）が制約式の個数の1個多い曲線（短期費用曲線）を包むように接する。

以下の3条件を満たすyが存在し、そのyの描く軌跡が包絡線[長期費用曲線]である。

短期の費用＝長期の費用：

$$C^n(y)=C^{n-1}(y)$$

短期の限界費用＝長期の限界費用：

$$dC^n(y)/dy=dC^{n-1}(y)/dy$$

短期限界費用が逓増する率>長期限界費用が逓増する率：

$$d^2C^n(y)/dy^2>d^2C^{n-1}(y)/dy^2$$

# 企業の費用関数と固定設備の例題

$C(y, k) = 0.045\ y^3 - 0.9\ y^2 + (10 - 2k)y + 5k^2$

「包絡線定理」の要件を満たすためには，**$y=\psi(k)$**のような関数$\psi$が存在する必要がある。

$\partial C/\partial y=0$より，最適解で、$k=\psi\ (y)=0.2\ y$

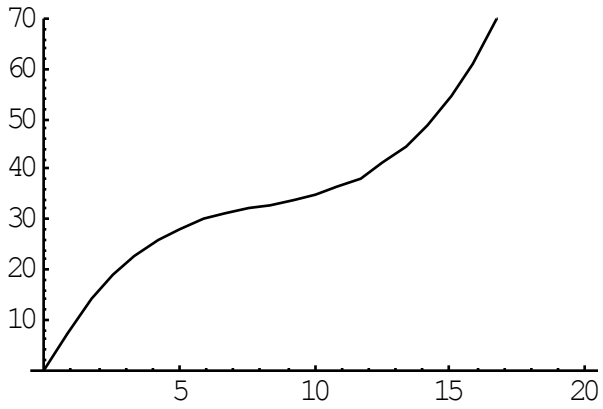
最小値関数：$k=\psi\ (y)=0.2\ y$を費用関数に代入することにより，費用Cを最小化するyとkの組合せを与える**最小値関数**を得る。

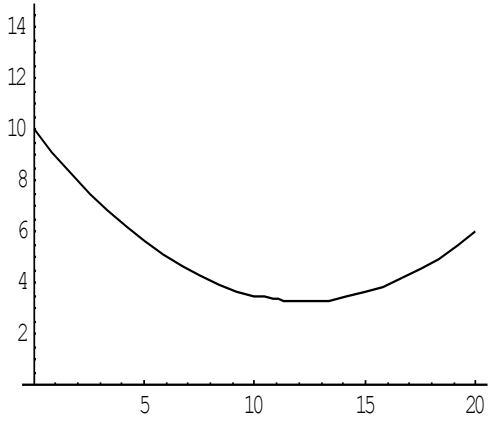
$C(y) = 0.045\ y^3 - 1.1\ y^2 + 10y$

yにかんする３次方程式であるので，y-C平面上に**逆S字型**の曲線を描く。

# 総費用曲線と平均費用曲線：

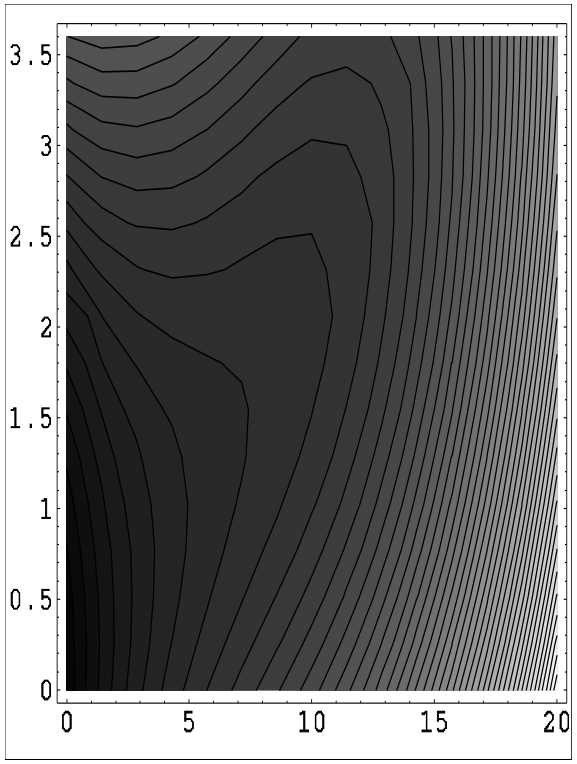
$$C(y) = 0.045\, y^3 - 1.1\, y^2 + 10y$$



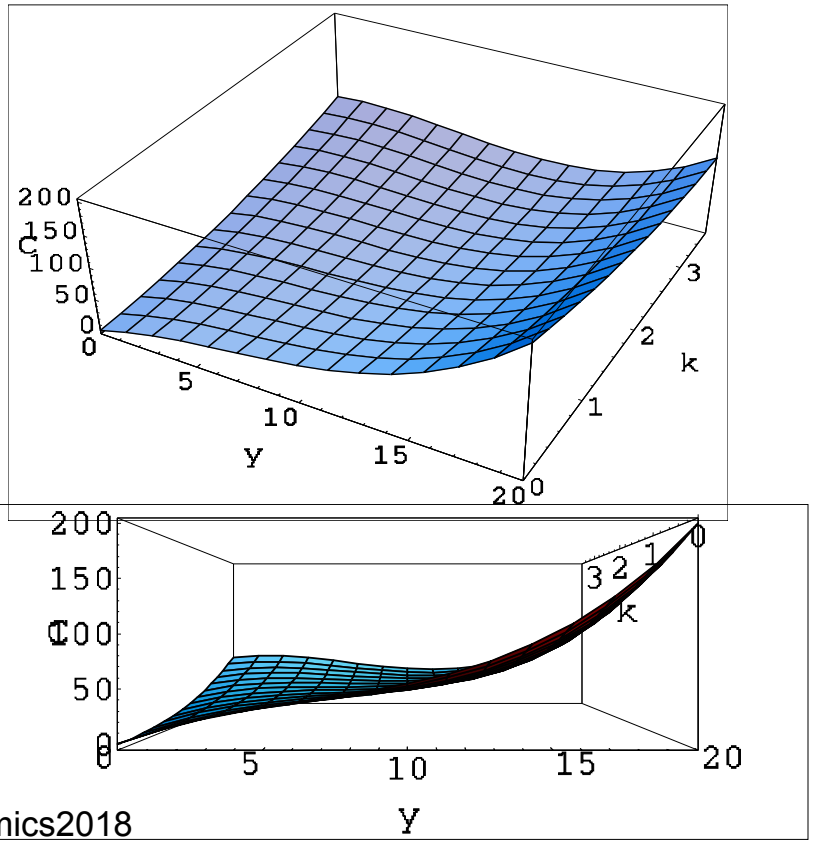



# 包絡線例題(図8.1)

## 包絡線の等高線




## 包絡線の立体図形



# 陰関数定理

- ✓ $(x_0,y_0)$の近傍でG(x,y)は**1階連続微分可能**$C^1$級
  - $G(x,y)=h$; $x^2 + 2y^2 =3$
  - $G_x(x_0,y_0)\neq 0$
  - **$x_0=\psi(y_0)$** ; x=either $-\sqrt{(3-2y^2)}$ or $\sqrt{(3-2y^2)}$

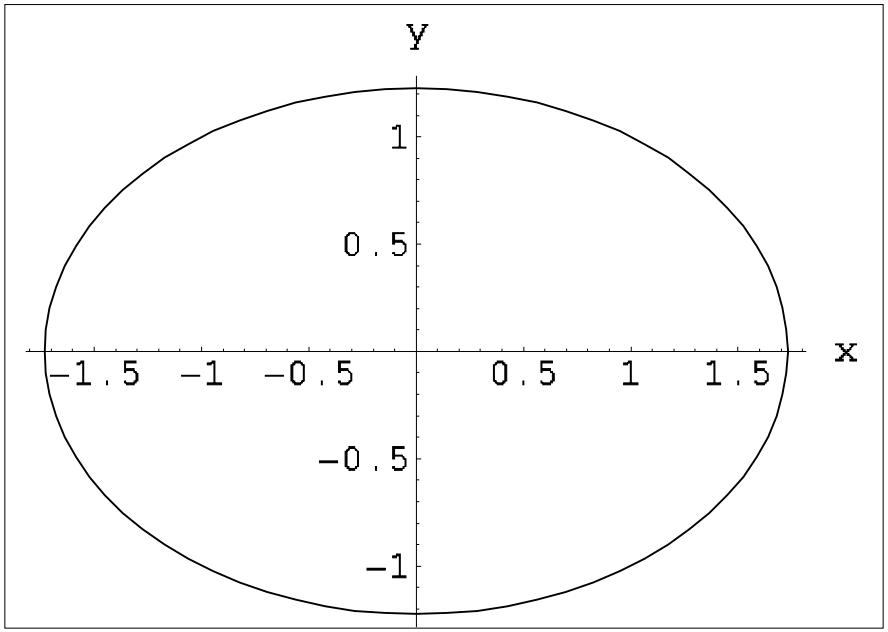
- ✓ **関数ψの存在する区間のすべてのyについて**
  - $G(x,y)=h$ ; $x^2 + 2y^2 =3$

- ✓ **$\psi'(y)=dx/dy= -G_y(\psi(y),x)/G_x(\psi(y),x)$**
  - $dx/dy=2y/\sqrt{(3-2y^2)}$
  - $-G_y(\psi(y),x)/G_x(\psi(y),x) =4y/2x=2y/\sqrt{(3-2y^2)}$

# 関数ψのグラフ

$G(x,y)=x^2 + 2y^2 =3$

$x_0=\psi(y_0)$, $(x_0,y_0)=(1,1.44)$



# 複占市場　教科書第9章

# 複占市場とクールノーの例題

上杉商会と武田商会は合計して市場価格*p*での市場需要***X*(*p*)**を満たす財を供給する。簡単化のため、生産と販売を同一視する。

**市場需要**＝上杉と武田の販売＝上杉と武田の生産

$X = x^{上杉} + x^{武田} = u + v$

***u***は上杉の販売・生産、***v***は武田の販売・生産

市場の需要は価格pのとき**逆需要関数**

$p=f(X)$
で表示することができる。

逆需要関数はX-p平面で右下がり$df/dX<0$

# クールノーの原例題

上杉商会と武田商会は鉱泉の権利を所有して供給費用なしにミネラルウォータを供給する会社である。

市場需要曲線は線形であるものとする。

市場需要関数　$p = f(X) = 60 - X$

$X = u + v$なので、

$p = f(u + v) = 60 - u - v$

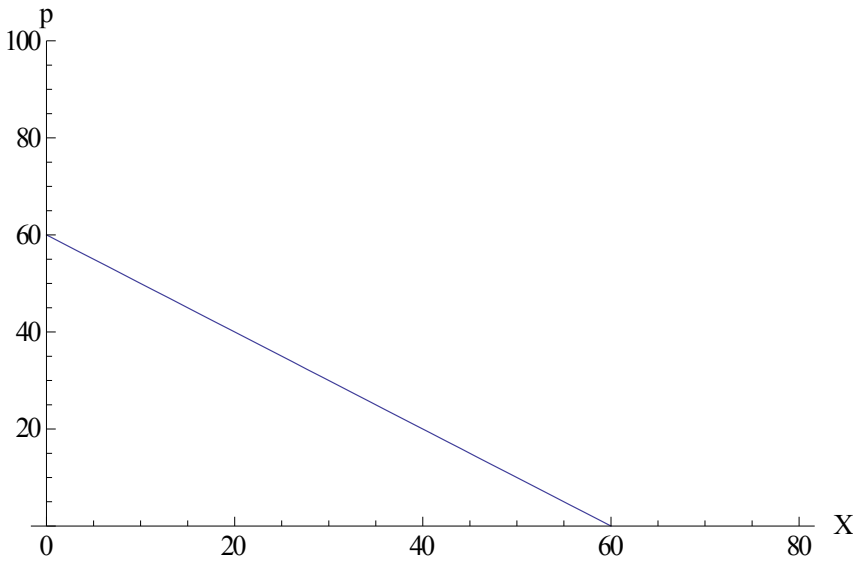
各社は「販売量」（数量戦略）を戦略として用いて利潤最大化を行う。ただし、ここでは、費用を考慮しないので、利潤最大化は収入最大化と同義。

クールノーの例題では各社にとって市場需要曲線の形状は共通の情報である。

# 市場需要曲線

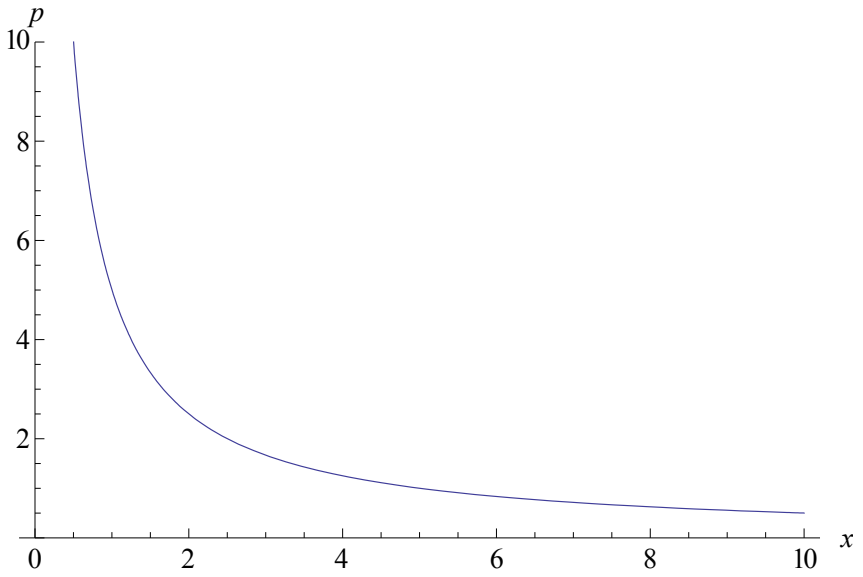
**不完全競争下の需要曲線**

***p = 60 –X***



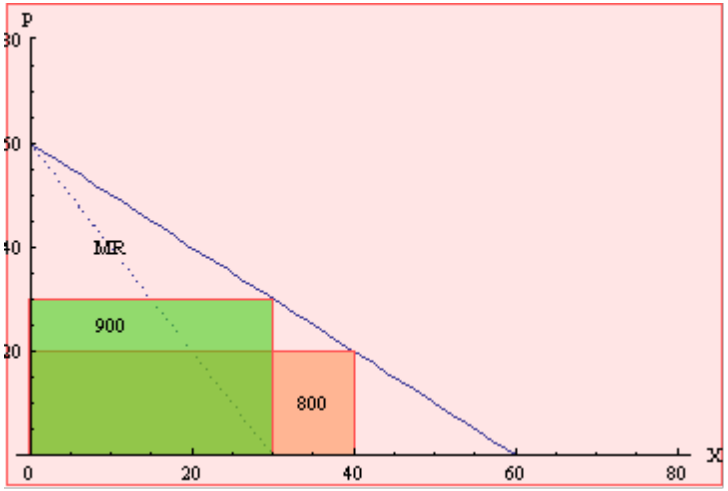

**消費者需要曲線**

***p = 5/X***

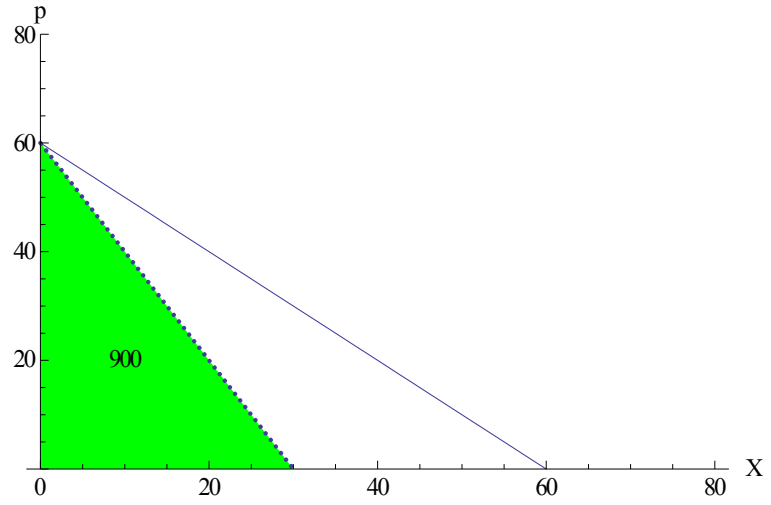


# 総収入と限界収入

**（総）収入曲線**




**限界収入曲線**



# クールノー複占企業の想定

さらに複占企業と情報と行動について以下のように想定する。

**想定1.**　各社は相手企業の生産量が変わらないと想定して自社に有利な販売量を選ぶ。

**想定2.**　両社は提携・結託などの協調的行動をとることはなく販売量を同時に決定する（同時手番）。

# 収入最大化

想定１より、両社は相手企業の販売量をさしあたり所与として収入最大化を企てる。

上杉商会の場合は、武田商会の販売量が$v = v_{const}$であるとして収入最大化する。

よって、$dv/du=0$

**上杉商会の収入**

$\pi^{上杉} = pu = (60 - u - v)\, u = 60u - u^2 - uv$

**上杉商会の収入（＝利潤）最大化１階条件**

$d\pi^{上杉}/du = 60 - 2u - v = 0$

# 収入最大化（2）

同様にして、武田商会は、$u = u_{const}$として

**武田商会の収入最大化１階条件**

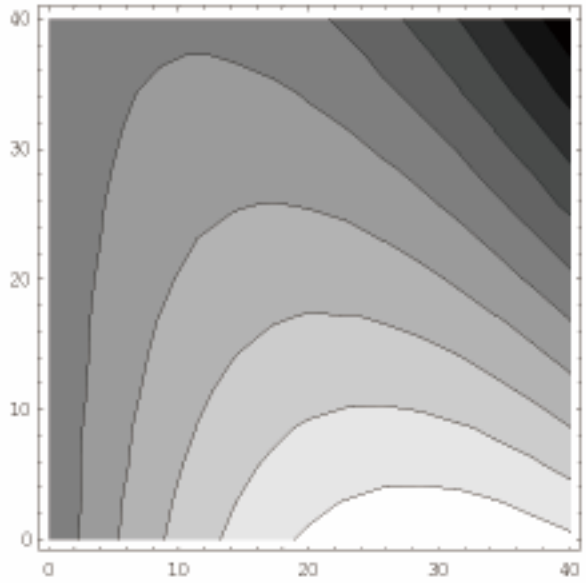
$d\pi^{武田}/dv = 60 - 2v - u = 0$

を満たす武田の販売量vが上杉商会の収入（＝利潤）を最大化する．

# 複占企業の等利潤曲線

横軸：当該企業の販売量

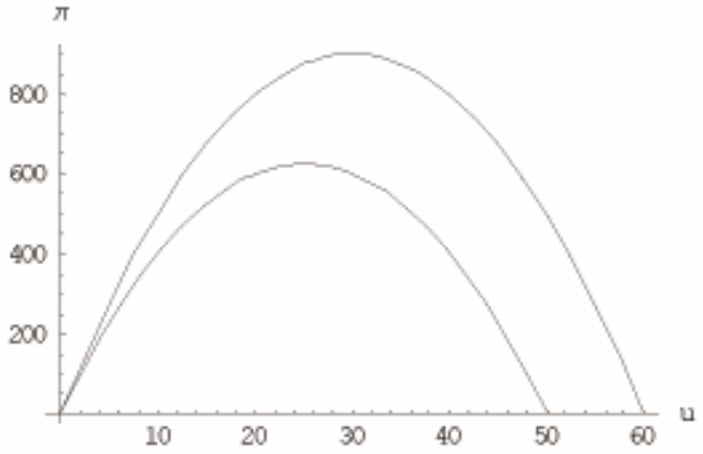
縦軸：相手企業の販売量



# 収入曲線

*v*=0のときの収入曲線π

*v*=10のときの収入曲線π [小さい山]



# 複占市場均衡

**想定1**より、両社ともに推測的変分は0とする。

**想定2**より、両社が同時に生産量を決定する。

上杉の反応曲線：$60 - 2u - v = 0$

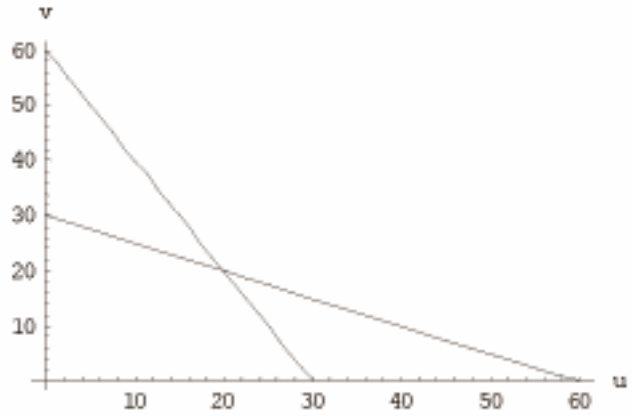
武田の反応曲線：$60 - 2v - u = 0$

上二式を満たすときにかぎり、想定1の下で、「武田商会が想定する上杉商会の販売量***u***」と「上杉商会が想定する武田商会の販売量***v***」が、つねに、相手側にとっても最適である。

# 反応曲線

**上杉の反応曲線：** $60 - 2u - v = 0$

**武田の反応曲線：** $60 - 2v - u = 0$



# 連立方程式の解としての均衡

[理由] 上二式はそれぞれ各社の利潤最大化条件である。二式を同時に満たさない解はもはや各社に利潤最大化を同時に保証しない。

**二元連立方程式**は2本の独立的に導かれた方程式と2個の未知数をもつ。ゆえに、一意的に定まり、

$u = 20, v = 20$

上杉商会が相手を$v$＝20、武田商会が相手を$u$=20と想定するときにかぎり、**想定1**、**想定**2の下で、両社ともにそれぞれ最大収入が保障される。

$pu$ =400, $pv$=400

# 独占解

2企業があたかも1企業で共同生産を行うかのように行動し、販売後に収入を二等分にする。この場合、独占解が得られるので、明らかに、複占解のときより、各企業の収入が高くなる。

***p = f (X ) = 60 –X***
を用いて、 独占収入は

$\pi = pX = (60 - X)X = 60X - X^2$

と書ける。

独占収入最大化１階条件は

$d\pi/dX = 60 - 2X = 0$

ゆえに、

$X = 30$。

総収入は

$pX = (60 - X)X = (60 - 30)30 = 900$。

したがって、各企業は30/2=15ずつ生産して、収入も二等分して450ずつ得る。

# クールノー-ナッシュ均衡

ナッシュ均衡

$\pi^{上杉}(u_{const}, v_{const}) > \pi^{上杉}(u, v_{const})$

$\pi^{武田}(u_{const}, v_{const}) > \pi^{武田}(u_{const}, v)$

上杉商会が均衡値u=20以外を選んでみる。たとえば、u=15とする。

$\pi^{上杉}(u, v_{const}) = \pi^{上杉}(15, 20)=375$

$\pi^{上杉}(u_{const}, v_{const}) = \pi^{上杉}(20, 20)=400$

$\pi^{上杉}(u_{const}, v_{const}) > \pi^{上杉}(u, v_{const})$

| 囚人ディレンマ | v=20 | v=15 |
|---|---|---|
| u=20 | (400, 400) | (500, 375) |
| u=15 | (375, 500) | (450, 450) |